答案與解析

對應課本各章頁碼

Chapter 1　三角函數的運用

1-1　解三角形

重點一　解三角形

範例 1- 老師導引 P.2

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4^2+(2\sqrt{3})^2-2^2}{2\cdot 4\cdot 2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \angle A=30^\circ$

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{2^2+(2\sqrt{3})^2-4^2}{2\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}}=0$

$\therefore \angle B=90^\circ$

則 $\angle C=180^\circ-30^\circ-90^\circ=60^\circ$

$\therefore \angle A=30^\circ$，$\angle B=90^\circ$，$\angle C=60^\circ$

範例 1- 學生演練 P.2

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$=\dfrac{(2\sqrt{2})^2+2^2-(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}=-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \angle A=180^\circ-75^\circ=105^\circ$

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$=\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2+2^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot 2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \angle B=45^\circ$

則 $\angle C=180^\circ-105^\circ-45^\circ=30^\circ$

$\therefore \angle A=105^\circ$，$\angle B=45^\circ$，$\angle C=30^\circ$

範例 2- 老師導引 P.3

(1) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3}+1)^2$

$-2(\sqrt{6})(\sqrt{3}+1)\cos 45^\circ=4$

$\therefore c=2$

(2) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{6}}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sin B}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle A=60^\circ\,(120^\circ\text{不合}) \\ \sin B=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \angle B=75^\circ\,(105^\circ\text{不合}) \end{cases}$

$\therefore c=2$，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=75^\circ$

範例 2- 學生演練 P.3

(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=(\sqrt{3}+1)^2+2^2$

$-2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot 2\cdot\cos 30^\circ=2$

$\therefore a=\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sin B}=\dfrac{2}{\sin C}$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin B=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \angle B=105^\circ\,(75^\circ\text{不合}) \\ \sin C=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle C=45^\circ\,(135^\circ\text{不合}) \end{cases}$

$\therefore a=\sqrt{2}$，$\angle B=105^\circ$，$\angle C=45^\circ$

範例 3- 老師導引 P.3

$\angle C=180^\circ-45^\circ-75^\circ=60^\circ$

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$\Rightarrow \dfrac{10}{\sin 45^\circ}=\dfrac{b}{\sin 75^\circ}=10\sqrt{2}$

$\Rightarrow b=10\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=5(\sqrt{3}+1)$

$\therefore \overline{AC}=5(\sqrt{3}+1)$

範例 3- 學生演練 P.3

$\angle B=180^\circ-30^\circ-45^\circ=105^\circ$

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$\Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{b}{\sin 105^\circ}=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow b=2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sqrt{3}+1$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{3}+1$

範例 4- 老師導引 P.4

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2}{\sin B}=2$

$\Rightarrow \sin B=\dfrac{2}{2}=1$　$\therefore \angle B=90^\circ$

得 $\angle C=180^\circ-60^\circ-90^\circ=30^\circ$

又 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{c}{\sin 30^\circ}\Rightarrow c=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=1$

$\therefore \angle B=90^\circ$，$\angle C=30^\circ$，$c=1$

對應課本各章頁碼

範例 4- 學生演練 P.4

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow\dfrac{3}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow\sin A=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\angle A=60^\circ$ 或 120°

(1) $\angle A=60^\circ$

得 $\angle C=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ$

則 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{c}{\sin 90^\circ}\Rightarrow c=2\sqrt{3}$

(2) $\angle A=120^\circ$

得 $\angle C=180^\circ-120^\circ-30^\circ=30^\circ$

則 $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{c}{\sin 30^\circ}\Rightarrow c=\sqrt{3}$

$\therefore$ (1) $\angle A=60^\circ$，$\angle C=90^\circ$，$c=2\sqrt{3}$ 或

(2) $\angle A=120^\circ$，$\angle C=30^\circ$，$c=\sqrt{3}$

1-1 學習成效驗收 P.5

1. $\angle B=180^\circ-45^\circ-75^\circ=60^\circ$

$\dfrac{10}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}\Rightarrow\overline{AC}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow\overline{AC}=5\sqrt{6}$

2. $\because\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin C}$ $\quad\therefore\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow\angle C=45^\circ$ 或 135°（不合）

則 $\angle A=75^\circ$

又 $\overline{BC}^2=(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos 75^\circ$

$=8+12-2\sqrt{6}\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})=20-12+4\sqrt{3}$

$=8+2\sqrt{12}$

$\overline{BC}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

3. 由三角形面積公式知：

三角形面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin\angle ABC$

$\therefore 4=\dfrac{1}{2}\times 2\times 5\times\sin\angle ABC\Rightarrow\sin\angle ABC=\dfrac{4}{5}$

$\therefore\cos\angle ABC=\pm\sqrt{1-\sin^2\angle ABC}$

$=\pm\sqrt{1-(\dfrac{4}{5})^2}=\pm\dfrac{3}{5}$

4. $\because\angle C=180^\circ-105^\circ-45^\circ=30^\circ$，

$c=\overline{AB}=20$，$a=\overline{BC}$

由正弦定理知：

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{20}{\sin 30^\circ}$

$\Rightarrow\dfrac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{20}{\frac{1}{2}}\Rightarrow a=20\sqrt{2}$ $\quad\therefore\overline{BC}=20\sqrt{2}$

5. $\because\cos C=\dfrac{2^2+(\sqrt{3}-1)^2-(\sqrt{2})^2}{2\times 2\times(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2\times(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\times(\sqrt{3}-1)}{2\times(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\angle C=30^\circ$ (或 $\dfrac{\pi}{6}$)

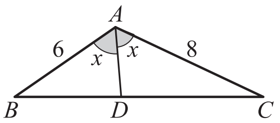
6. $\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$

$\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\sin 120^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot\overline{AD}\cdot\sin 60^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot\overline{AD}\cdot\sin 60^\circ$

$48=14\cdot\overline{AD}$

$\therefore\overline{AD}=\dfrac{24}{7}$



7. $\cos\theta=\dfrac{7^2+5^2-9^2}{2\times 7\times 5}=\dfrac{-7}{2\times 7\times 5}=-\dfrac{1}{10}$

8. (1) $\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}\Rightarrow\dfrac{16}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}\Rightarrow\overline{AC}=16\sqrt{3}$

(2) $\triangle ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times 16\times 16\sqrt{3}$

$=128\sqrt{3}$

9. $\dfrac{10}{\sin A}=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}\Rightarrow\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow\sin A=1$

$\Rightarrow\angle A=90^\circ$，則 $\angle C=180^\circ-90^\circ-60^\circ=30^\circ$

代回上式得 $c=5$

直角 $\triangle ABC$ 面積

$=\dfrac{1}{2}bc=\dfrac{1}{2}\times 5\sqrt{3}\times 5=\dfrac{25\sqrt{3}}{2}$

10. (1) $\triangle ABC$ 面積

$=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 4\times 6\times\sin 60^\circ=6\sqrt{3}$

(2) $\overline{AB}^2=c^2=4^2+6^2-2\times 4\times 6\times\cos 60^\circ=28$

$\Rightarrow\overline{AB}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

(3) $\triangle ABC$ 面積

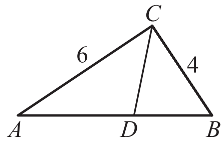
$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times h\Rightarrow h=\dfrac{6\sqrt{3}\times 2}{6}=2\sqrt{3}$

(4) $\overline{CD}$ 為 $\angle ACB$ 的分角線

$\triangle ABC$ 面積 $=\triangle ACD$ 面積 $+\triangle BCD$ 面積

$\Rightarrow 6\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\times 6\times\overline{CD}\times\sin 30^\circ+\dfrac{1}{2}\times 4\times\overline{CD}\times\sin 30^\circ$

$\Rightarrow\overline{CD}=\dfrac{12\sqrt{3}}{5}$



答案與解析

對應課本各章頁碼

1-1 實力測驗 P.6～8

1.(C)	2.(D)	3.(D)	4.(A)	5.(B)
6.(D)	7.(B)	8.(C)	9.(D)	10.(C)
11.(C)	12.(A)	13.(D)	14.(A)	15.(D)
16.(D)	17.(A)	18.(B)	19.(D)	20.(C)
21.(A)	22.(D)	23.(D)	24.(B)	25.(D)
26.(C)	27.(C)			

1. $\triangle ABC$ 面積$=\dfrac{1}{2}ab\sin C$
$=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 10\cdot \sin 60^\circ=15\sqrt{3}$

2. $s=\dfrac{1}{2}(4+5+7)=8$
$\triangle ABC$ 面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$=\sqrt{8\cdot(8-4)\cdot(8-5)\cdot(8-7)}$
$=4\sqrt{6}$

3. $\triangle ABC$ 面積$=\dfrac{abc}{4R}\Rightarrow R=\dfrac{4\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 4\sqrt{6}}=\dfrac{35}{24}\sqrt{6}$

4. $\triangle ABC$ 面積$=rs\Rightarrow 4\sqrt{6}=r\cdot 8\quad \therefore r=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

5. $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(\sqrt{6})^2+2^2-(\sqrt{3}+1)^2}{2\cdot\sqrt{6}\cdot 2}$
$=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\quad \therefore \angle A=75^\circ$
$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot 2}$
$=\dfrac{1}{2}\quad \therefore \angle B=60^\circ$
則$\angle C=180^\circ-75^\circ-60^\circ=45^\circ$

6. $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
$=2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot 2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\cos 60^\circ$
$=6\quad \therefore c=\sqrt{6}$
又$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$
$\Rightarrow \dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}\Rightarrow \sin A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$\therefore \angle A=45^\circ$ 或 135°（不合）
則$\angle B=180^\circ-45^\circ-60^\circ=75^\circ$

7. $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin C}\Rightarrow \sin C=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$\therefore \angle C=45^\circ$ 或 135°
①$\angle C=135^\circ$ 時：
$\angle A=180^\circ-60^\circ-135^\circ=-15^\circ$（不合）
②$\angle C=45^\circ$ 時：$\angle A=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$
$\dfrac{a}{\sin 75^\circ}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin 60^\circ}\Rightarrow a=3+\sqrt{3}$

8. $\angle C=180^\circ-30^\circ-105^\circ=45^\circ$
$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$
$\Rightarrow\dfrac{a}{\sin 30^\circ}=\dfrac{b}{\sin 105^\circ}=\dfrac{c}{\sin 45^\circ}=2R$
$\Rightarrow a=6\sqrt{2}$，$b=6(\sqrt{3}+1)$，$R=6\sqrt{2}$
$\triangle ABC$ 外接圓面積$=\pi(6\sqrt{2})^2=72\pi$

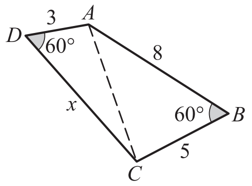
9. $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin 15^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sin C}$
$\sin C=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\therefore \angle C=75^\circ$ 或 105°
①$\angle C=75^\circ$ 時：$\angle A=180^\circ-15^\circ-75^\circ=90^\circ$
$\dfrac{a}{\sin 90^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin 15^\circ}\Rightarrow a=2\sqrt{2}$
②$\angle C=105^\circ$ 時：$\angle A=180^\circ-15^\circ-105^\circ=60^\circ$
$\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin 15^\circ}\Rightarrow a=\sqrt{6}$

10. 由餘弦定理知
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
$=7^2+3^2-2\times 7\times 3\times\cos 60^\circ$
$=49+9-42\times\dfrac{1}{2}=37\quad \therefore a=\sqrt{37}$

11. $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{2}{\sin B}$
$\Rightarrow \sin B=\dfrac{2\times\sin 30^\circ}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，
$\Rightarrow \angle B=45^\circ$ 或 135°，但是 $c>b$
$\Rightarrow \angle C>\angle B\Rightarrow \angle B=45^\circ$，
$\therefore \angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=180^\circ-30^\circ-45^\circ=105^\circ$

12. 由餘弦定理知
$\cos\theta=\dfrac{5^2+6^2-7^2}{2\times 5\times 6}=\dfrac{12}{60}=\dfrac{1}{5}$
（利用三角形大邊對大角）

13. 設 $\overline{CD}=x\quad(x>0)$
在$\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}^2=8^2+5^2-2\times 8\times 5\times\cos 60^\circ$
$=49\cdots\cdots$①
在$\triangle ADC$ 中，$\overline{AC}^2=3^2+x^2-2\times 3\times x\times\cos 60^\circ$
$=x^2-3x+9\cdots\cdots$②
由①和②知
$x^2-3x+9=49\Rightarrow x^2-3x-40=0$
$\Rightarrow(x-8)(x+5)=0\Rightarrow x=8$ 或 -5（不合）
故 $\overline{CD}=8$



答案與解析

14. 由餘弦定理知：

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$=2^2+(2\sqrt{3})^2-2\times2\times2\sqrt{3}\times\cos30^\circ$

$=4+12-8\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4\quad\therefore\ b=2$

15. $\because\ \angle C=90^\circ$，且 $\overline{AC}=\overline{BC}=3$

$\therefore\angle A=\angle B=45^\circ\quad\therefore\ \sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

16. $\because\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$\therefore\ b^2=4+4+2\sqrt{3}-2\cdot2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\cos30^\circ$

$=2$

$\Rightarrow b=\sqrt{2}$

則 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin30^\circ}$

$\Rightarrow\angle A=45^\circ$ 或 135°（不合）（$\because\ c>a$）

故 $\angle C=105^\circ$

17. 依據正弦定理 $\dfrac{20}{\sin100^\circ}=\dfrac{30}{\sin B}$，則 $\sin B$ 應該要大於 $\sin100^\circ$，即 $\angle A+\angle B$ 超過 180°

$\therefore\triangle ABC$ 不存在

18. $\angle A=180^\circ-45^\circ-75^\circ=60^\circ$

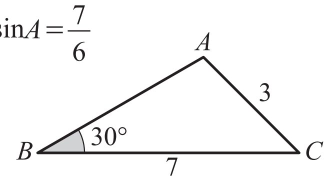
由正弦定理知：

$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin60^\circ}=\dfrac{b}{\sin45^\circ}\Rightarrow b=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

19. $\dfrac{3}{\sin30^\circ}=\dfrac{7}{\sin A}\Rightarrow\sin A=\dfrac{7}{6}$

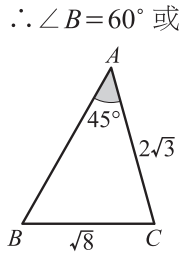
$\because\ -1\le\sin A\le1$

$\therefore$ 無解

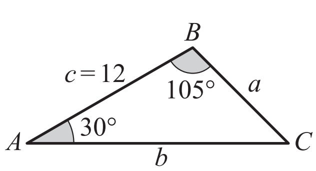


20. $\dfrac{\sqrt{8}}{\sin45^\circ}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin B}\Rightarrow\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\angle B=60^\circ$ 或 120°



21.



$\angle C=180^\circ-30^\circ-105^\circ=45^\circ$

由正弦定理知：

$\dfrac{a}{\sin30^\circ}=\dfrac{12}{\sin45^\circ}\Rightarrow\dfrac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\dfrac{1}{2}=6\sqrt{2}$

22. $\because$ 三邊長 3、4、5

$\therefore\angle BAC=90^\circ$

$\Rightarrow\angle BAD=\angle CAD=45^\circ$

利用 $\triangle ABD$ 面積 $+\triangle ACD$ 面積 $=\triangle ABC$ 面積

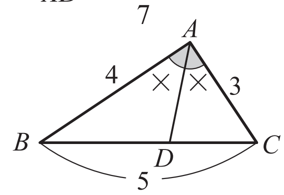
$\Rightarrow\dfrac{1}{2}\times4\times\overline{AD}\times\sin45^\circ+\dfrac{1}{2}\times3\times\overline{AD}\times\sin45^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times4\times3\times\sin90^\circ$

$\Rightarrow\sqrt{2}\,\overline{AD}+\dfrac{3}{4}\sqrt{2}\,\overline{AD}=6$

$\Rightarrow\dfrac{7}{4}\sqrt{2}\,\overline{AD}=6$

$\Rightarrow\overline{AD}=\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$



23. 在直角 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

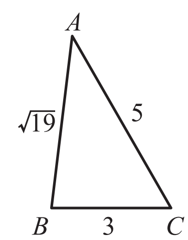
在直角 $\triangle ADC$ 中，$\overline{AD}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

在 $\triangle ABD$ 中，$\cos\theta=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}$

$=\dfrac{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{10})^2-2^2}{2\times3\sqrt{2}\times\sqrt{10}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

24. $\cos C=\dfrac{3^2+5^2-(\sqrt{19})^2}{2\times3\times5}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\angle C=60^\circ$



25. $b^2-(c-a)^2=ca\Rightarrow b^2-(c^2-2ac+a^2)=ca$

$\therefore\ b^2-c^2-a^2+2ac=ca\quad\therefore\ ac=a^2+c^2-b^2$

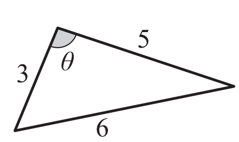
$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\angle B=60^\circ$

26. $\cos\theta=\dfrac{3^2+5^2-6^2}{2\times3\times5}=-\dfrac{1}{15}$

$\therefore\ \theta>90^\circ$

故為鈍角三角形



27. $\because\dfrac{7}{\sin A}=\dfrac{8}{\sin B}=\dfrac{13}{\sin C}$

則 $\sin A：\sin B：\sin C=7：8：13$

$\therefore\ a：b：c=7：8：13$

設 $a=7k$，$b=8k$，$c=13k$，$k>0$，

由餘弦定理：

$\cos C=\dfrac{(7k)^2+(8k)^2-(13k)^2}{2\times7k\times8k}=\dfrac{-56k^2}{112k^2}=-\dfrac{1}{2}$

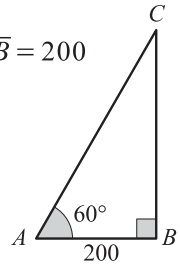
答案與解析

對應課本各章頁碼

1-2 三角測量

重點一 三角測量

範例 1- 老師導引 P.10



如圖，樓高 $\overline{BC}$，$\angle A=60^\circ$，$\overline{AB}=200$

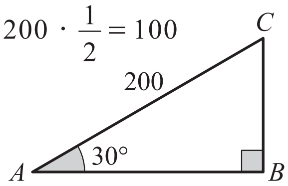
$\because\ \tan60^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

$\Rightarrow\overline{BC}=200\cdot\sqrt{3}=200\sqrt{3}$

範例 1- 學生演練 P.10

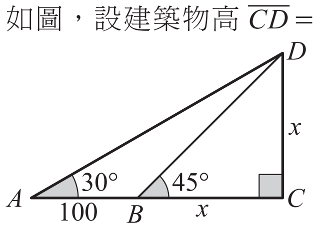
如圖，$\overline{AC}=200$，$\angle A=30^\circ$，風箏高 $\overline{BC}$

$\because\ \sin30^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\Rightarrow\overline{BC}=200\cdot\dfrac{1}{2}=100$



範例 2- 老師導引 P.10

如圖，設建築物高 $\overline{CD}=x$



$\because\ \tan45^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}}\Rightarrow\overline{CD}=x$

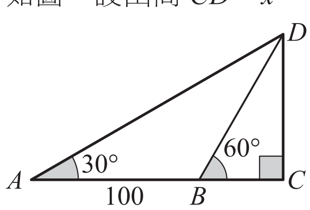
則 $\tan30^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{x}{100+x}$

$\Rightarrow(\sqrt{3}-1)x=100\Rightarrow x=50(\sqrt{3}+1)$

故建築物高 $50(\sqrt{3}+1)$

範例 2- 學生演練 P.10

如圖，設山高 $\overline{CD}=x$



已知 $\angle A=30^\circ$，$\angle DBC=60^\circ$，$\overline{AB}=100$

$\because\ \tan60^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}}\Rightarrow\overline{BC}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

則 $\tan30^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{x}{100+\dfrac{x}{\sqrt{3}}}$

$\Rightarrow\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x=100\Rightarrow x=50\sqrt{3}$

故山高 $50\sqrt{3}$

範例 3- 老師導引 P.11

如圖，設建築物高 $\overline{BC}=x$

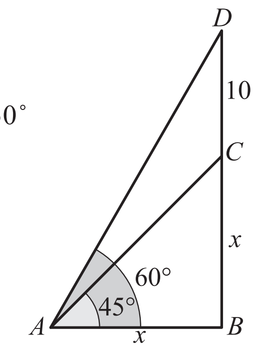
旗桿 $\overline{CD}=10$，

$\angle CAB=45^\circ$，$\angle DAB=60^\circ$

$\because\ \tan45^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}\Rightarrow\overline{AB}=x$

則 $\tan60^\circ=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$

$\Rightarrow\sqrt{3}=\dfrac{10+x}{x}$



$\Rightarrow(\sqrt{3}-1)x=10\Rightarrow x=5(\sqrt{3}+1)$

故建築物高 $5(\sqrt{3}+1)$

範例 3- 學生演練 P.11

如圖，設旗桿 $\overline{CD}=x$

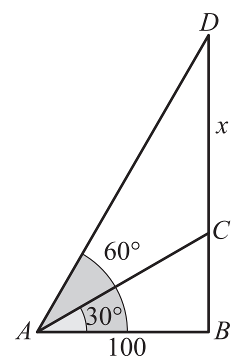
已知 $\angle CAB=30^\circ$

$\angle DAB=60^\circ$，$\overline{AB}=100$

$\because\ \tan30^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

$\Rightarrow\overline{BC}=\dfrac{100}{\sqrt{3}}$

則 $\tan60^\circ=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$

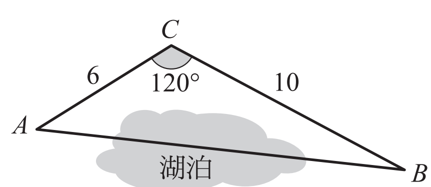


$\Rightarrow\sqrt{3}=\dfrac{x+\dfrac{100}{\sqrt{3}}}{100}\Rightarrow100\sqrt{3}=x+\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow x=\dfrac{200\sqrt{3}}{3}$，故旗桿高 $\dfrac{200\sqrt{3}}{3}$

範例 4- 老師導引 P.11

如圖



$\overline{AB}^2=6^2+10^2-2\cdot6\cdot10\cdot\cos120^\circ$

$=36+100+60$

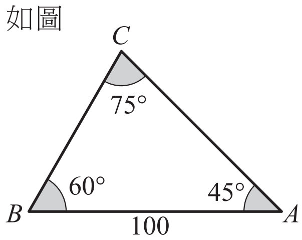
$=196$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{196}=14$

對應課本各章頁碼

範例 4- 學生演練 P.11

如圖



$\angle C=180^\circ-60^\circ-45^\circ=75^\circ$

則$\dfrac{\overline{BC}}{\sin45^\circ}=\dfrac{100}{\sin75^\circ}$

$\Rightarrow \overline{BC}=\dfrac{100}{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=100(\sqrt{3}-1)$

範例 5- 老師導引 P.12

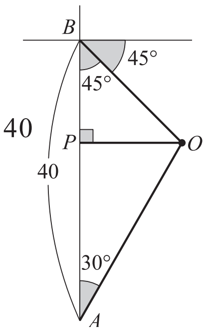
附圖中，設島的所在位置為 O 點，

$\overline{OP}=x\Rightarrow\overline{AP}=\sqrt{3}x$，$\overline{PB}=x$

$\overline{AB}=\overline{AP}+\overline{PB}$

$\Rightarrow\sqrt{3}x+x=40$，$(\sqrt{3}+1)x=40$

$\therefore x=20(\sqrt{3}-1)$（浬）



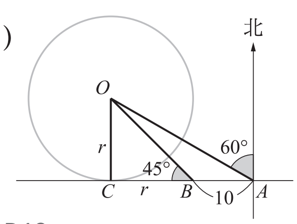
範例 5- 學生演練 P.12

如圖，$\triangle OBC$ 中，$\overline{OC}=r=\overline{BC}$

$\dfrac{\overline{AC}}{\overline{OC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\dfrac{r+10}{r}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}$

$\Rightarrow\sqrt{3}r=r+10\Rightarrow(\sqrt{3}-1)r=10$

$\therefore r=\dfrac{10}{\sqrt{3}-1}=5(\sqrt{3}+1)$



範例 6- 老師導引 P.12

設塔為 $\overline{OT}$，塔高為 h 公尺，

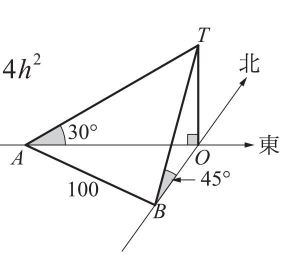
則 $\overline{OA}=\dfrac{h}{\tan30^\circ}=\sqrt{3}h$，$\overline{OB}=\dfrac{h}{\tan45^\circ}=h$，

又$\angle AOB=90^\circ$

$\therefore\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2$

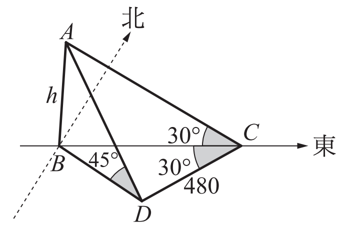
$\Rightarrow 100^2=(\sqrt{3}h)^2+h^2=4h^2$

$\Rightarrow h=\dfrac{100}{2}=50$（公尺）



範例 6- 學生演練 P.12

設樓高 h 公尺，作圖如附：



可得 $\overline{BC}=\sqrt{3}h$，$\overline{BD}=h$，

$\triangle BCD$ 中，由餘弦定理可得

$\cos30^\circ=\dfrac{(\sqrt{3}h)^2+(480)^2-h^2}{2\times\sqrt{3}h\times480}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow 2h^2+(480)^2=3\times480\times h$

$\Rightarrow 2h^2-3\times480\times h+(480)^2=0$

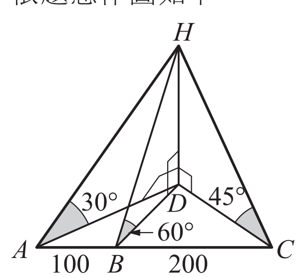
$\Rightarrow(2h-480)(h-480)=0$

$\Rightarrow h=480$，240（不合）

$\Rightarrow\dfrac{480}{4}=120$，故共有 120 層

範例 7- 老師導引 P.13

依題意作圖如下，



令山高 $\overline{HD}=h$ 公尺

$\Rightarrow\overline{AD}=\sqrt{3}h$、$\overline{BD}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$、$\overline{CD}=h$

在$\triangle ABD$與$\triangle ABC$中，利用餘弦定理

$\cos A=\dfrac{100^2+3h^2-\dfrac{1}{3}h^2}{2\cdot100\cdot\sqrt{3}h}=\dfrac{300^2+3h^2-h^2}{2\cdot300\cdot\sqrt{3}h}$

解得 $h=100$

範例 7- 學生演練 P.13

設山高 $\overline{DE}=h$，則 $\overline{AE}=\sqrt{3}h$，$\overline{BE}=h$，

$\overline{CE}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$，令$\angle EAB=\angle EAC=\theta$，

在$\triangle ABE$中，

$\cos\theta=\dfrac{(\sqrt{3}h)^2+1200^2-h^2}{2\cdot\sqrt{3}h\cdot1200}$

在$\triangle AEC$中，

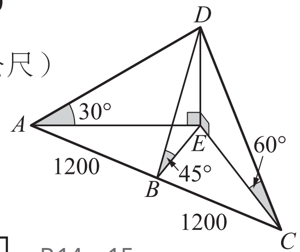
$\cos\theta=\dfrac{(\sqrt{3}h)^2+2400^2-(\dfrac{h}{\sqrt{3}})^2}{2\cdot\sqrt{3}h\cdot2400}$

對應課本各章頁碼

$\therefore \dfrac{(\sqrt{3}\,h)^2+1200^2-h^2}{2\cdot\sqrt{3}\,h\cdot 1200}=$

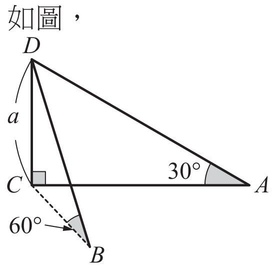
$\dfrac{(\sqrt{3}\,h)^2+2400^2-(\dfrac{h}{\sqrt{3}})^2}{2\cdot\sqrt{3}\,h\cdot 2400}$，

解得 $h=600\sqrt{6}$（公尺）



1-2 學習成效驗收 P.14、15

1. 如圖，



$\overline{AC}=\sqrt{3}\,a$ $\overline{BC}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow\triangle ABC$ 中

$\overline{AB}^2=(\sqrt{3}\,a)^2+(\dfrac{a}{\sqrt{3}})^2-2\cdot\sqrt{3}\,a\cdot\dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{7}{3}a^2$

$\Rightarrow\overline{AB}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}a$

2. 設大雄所在處為 A，氣球升空處為 B

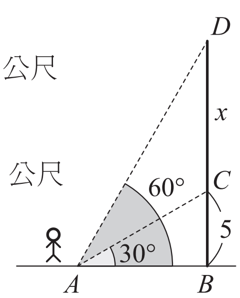
根據 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 三邊比知

$\overline{AB}=5\sqrt{3}$，$\overline{BD}=15$

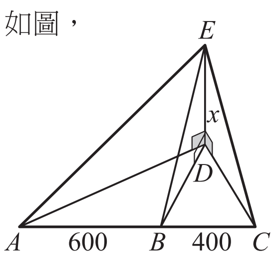
設 20 秒內，氣球上升 x 公尺

則 $x=15-5=10$

$\therefore$每秒氣球上升$\dfrac{10}{20}=0.5$ 公尺



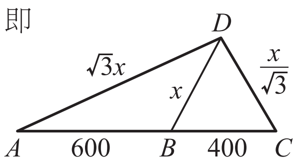
3. 如圖，



設山高 $\overline{DE}=x$ 公尺

則 $\overline{AD}=\sqrt{3}\,x$，$\overline{BD}=x$，$\overline{CD}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

即

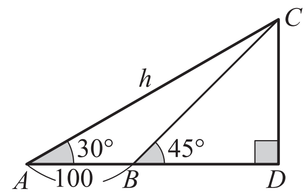


由 $\Rightarrow\begin{cases}\triangle ABD\text{ 中，}\cos A=\dfrac{(\sqrt{3}\,x)^2+600^2-x^2}{2\cdot 600\cdot\sqrt{3}\,x}\cdots\cdots①\\ \triangle ACD\text{ 中，}\cos A=\dfrac{(\sqrt{3}\,x)^2+1000^2-(\dfrac{x}{\sqrt{3}})^2}{2\cdot 1000\cdot\sqrt{3}\,x}\cdots\cdots②\end{cases}$

$\because$①＝②

$\therefore$得 $x=200\sqrt{15}$

4. 由圖知，

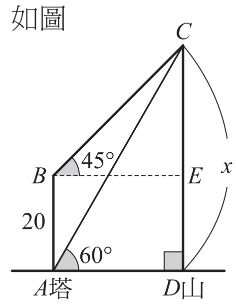


$\overline{CD}=\overline{BD}=\dfrac{1}{2}h$

則$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\tan 30^\circ$

即$\dfrac{\dfrac{h}{2}}{100+\dfrac{h}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow h=100(\sqrt{3}+1)$

5. 如圖

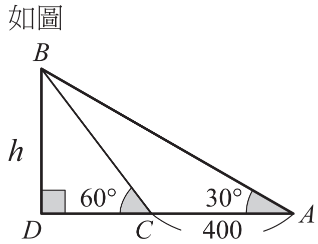


設山高 x 公尺

則 $\overline{BE}=\overline{CE}=x-20=\overline{AD}$

$\triangle ACD$ 中，$\dfrac{x-20}{\sin 30^\circ}=\dfrac{x}{\sin 60^\circ}\Rightarrow x=10(3+\sqrt{3})$

6. 如圖



$\overline{BD}=h\Rightarrow\overline{CD}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$

則 $\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AD}}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{h}{400+\dfrac{h}{\sqrt{3}}}$

$\therefore h=200\sqrt{3}$

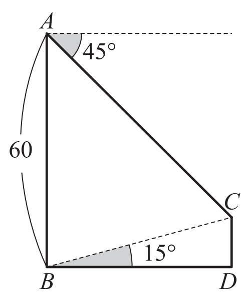
對應課本各章頁碼

7. A 表大廈屋頂，B 表大門口，分別以 C、D 表示旗桿的頂與底，知$\angle ACB=60^\circ$

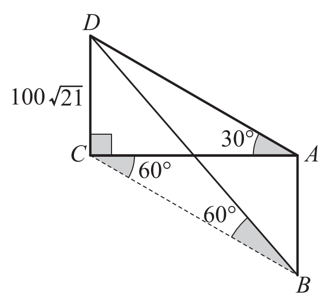
$\therefore \dfrac{60}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ}\Rightarrow \overline{BC}=\dfrac{60}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=20\sqrt{6}$

$\therefore \overline{CD}=20\sqrt{6}\sin 15^\circ=20\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$=10(3-\sqrt{3})$公尺



8. 如圖，



得知 $\overline{AC}=300\sqrt{7}$　$\overline{BC}=100\sqrt{7}$

$\therefore \overline{AB}^2=(300\sqrt{7})^2+(100\sqrt{7})^2-2\cdot 300\sqrt{7}$

$\cdot 100\sqrt{7}\cdot\cos 60^\circ$

$=630000+70000-210000=490000$

$\Rightarrow \overline{AB}=700$

9. 設旗桿高 $\overline{AC}=h$ 公尺

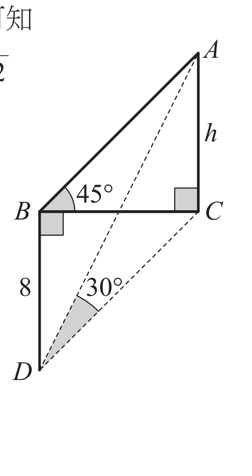
$\triangle ABC$ 中，$\tan 45^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\dfrac{h}{\overline{BC}}=1\Rightarrow \overline{BC}=h$

$\triangle ACD$ 中，$\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\dfrac{h}{\overline{CD}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \overline{CD}=\sqrt{3}\,h$

$\triangle BCD$ 中，由畢氏定理可知

$\left(\sqrt{3}\,h\right)^2=h^2+8^2\Rightarrow h=4\sqrt{2}$



10. 令 $\overline{BC}=x$

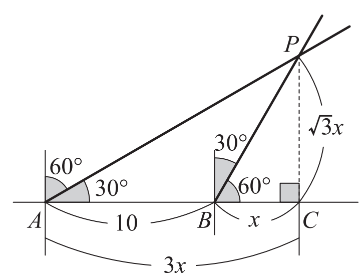
利用 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 之各邊比為 1：$\sqrt{3}$：2

$\Rightarrow \overline{PC}=\sqrt{3}\,x$

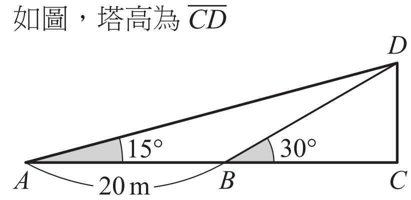
$\Rightarrow \overline{AC}=(\sqrt{3}\,x)\times\sqrt{3}=3x$

即 $3x=10+x\Rightarrow x=5$

$\therefore$最近距離 $\overline{PC}=\sqrt{3}\,x=5\sqrt{3}$（浬）



11. 如圖，塔高為 $\overline{CD}$

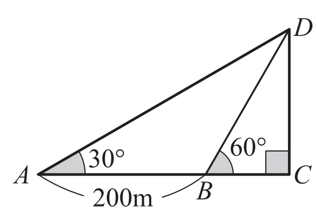


$\angle ADB=30^\circ-15^\circ=15^\circ$

故 $\overline{AB}=\overline{BD}=20$（公尺）

$\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}=10$（公尺）

12. 如圖，$\overline{CD}$ 為山高 $\overline{AB}=\overline{BD}=200$



$\sin 60^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{CD}}{200}\Rightarrow \overline{CD}=100\sqrt{3}$（公尺）

對應課本各章頁碼

1-2 實力測驗 P.16 ～ 19

1.(A)	2.(B)	3.(D)	4.(A)	5.(C)
6.(B)	7.(A)	8.(B)	9.(C)	10.(A)
11.(A)	12.(A)	13.(B)	14.(C)	15.(D)
16.(D)	17.(C)	18.(C)	19.(B)	20.(D)
21.(B)	22.(E)	23.(A)	24.(B)	

1. 設山高 $\overline{CD}=x$ 公尺

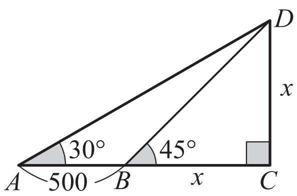
則 $\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{x}{500+x}$

$\Rightarrow \sqrt{3}\,x=500+x$

$\Rightarrow (\sqrt{3}-1)x=500$

$\therefore x=\dfrac{500}{(\sqrt{3}-1)}=250\left(\sqrt{3}+1\right)$



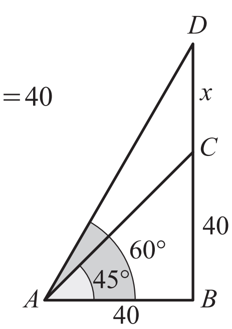
2. 設旗桿長 $\overline{CD}=x$

$\because \angle CAB=45^\circ \Rightarrow \overline{BC}=\overline{AB}=40$

則 $\tan 60^\circ=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$

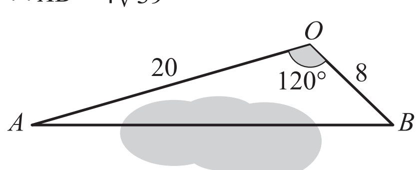
$\Rightarrow \sqrt{3}=\dfrac{x+40}{40}$

$\Rightarrow x=40\left(\sqrt{3}-1\right)$



3. $\overline{AB}=20^2+8^2-2\cdot 20\cdot 8\cdot \cos 120^\circ=624$

$\therefore \overline{AB}=4\sqrt{39}$



4. 如圖：C 為燈塔

$\overline{CD}$ 為最短距離

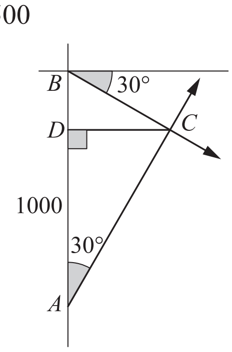
$\because \angle BAC=30^\circ \quad \angle ABC=90^\circ-30^\circ=60^\circ$

$\because \angle ACB=90^\circ$ 得 $\overline{BC}=500$，$\overline{AC}=500\sqrt{3}$

則 $\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}$

$\Rightarrow 1000\cdot\overline{CD}=500\sqrt{3}\cdot 500$

$\therefore \overline{CD}=250\sqrt{3}$（公尺）



5. 設建築物高 $\overline{CD}=x$

$\angle CAD=45^\circ \Rightarrow \overline{AC}=x$

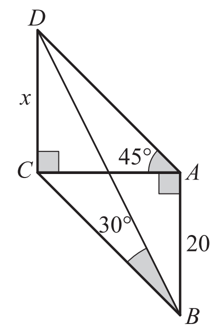
$\angle CBD=30^\circ \Rightarrow \overline{BC}=\sqrt{3}\,x$

$\triangle ABC$ 為直角$\triangle$

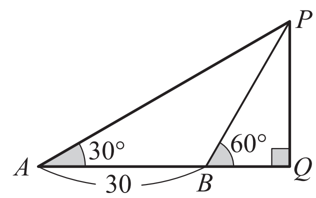
則 $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2$

$\Rightarrow 3x^2=x^2+20^2$

$\Rightarrow x=10\sqrt{2}$（公尺）



6. 如圖所示，設旗桿高為 $\overline{PQ}$（公尺），



則某甲前進 30 公尺後與旗桿的距離為 $\overline{BQ}$（公尺），

$\because \angle PAQ=30^\circ$，$\angle PBQ=60^\circ$

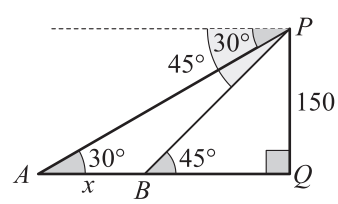
$\Rightarrow \triangle PAB$ 為等腰三角形，即 $\overline{PB}=\overline{AB}=30$，

在直角$\triangle PBQ$ 中，

$\overline{BQ}=\overline{PB}\times\cos 60^\circ=30\times\dfrac{1}{2}=15$，

$\therefore$某甲前進 30 公尺後與旗桿間的距離為 15 公尺

7. 如圖所示，



山高 $\overline{PQ}=150$ 公尺，

$\triangle PQB$ 為等腰直角三角形$\Rightarrow \overline{BQ}=\overline{PQ}=150$，

在直角$\triangle PQA$ 中，$\angle PAQ=30^\circ$，設 $\overline{AB}=x$

$\Rightarrow \tan 30^\circ=\dfrac{150}{x+150}\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{150}{x+150}$

$\Rightarrow x+150=150\sqrt{3}\Rightarrow x=150(\sqrt{3}-1)$，

$\therefore A$、B 的距離為 $150\left(\sqrt{3}-1\right)$ 公尺

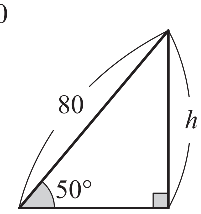
8. 如圖所示

設風箏高度為 h 公尺

$\dfrac{h}{80}=\sin 50^\circ=\cos 40^\circ=0.7660$

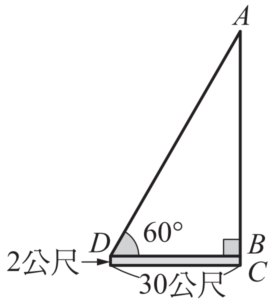
$\Rightarrow h=80\times 0.7660=61.28$

$\therefore$風箏的高度為 61.28 公尺



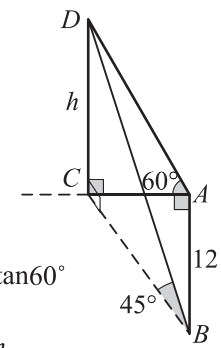
9. $\overline{BC}=30$ $\quad \dfrac{\overline{AB}}{30}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\overline{AB}=30\sqrt{3}$

∴洋基大廈高度為 $30\sqrt{3}+2$（公尺）



10. 如圖所示：

設塔的高度為 h 公尺



⑴在$\triangle BCD$ 中

$\because \angle CBD=45^\circ$

$\therefore \overline{BC}=\overline{CD}=h$（公尺）

在$\triangle ACD$ 中

$\because \angle CAD=60^\circ\Rightarrow\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}=\tan60^\circ$

$\Rightarrow\dfrac{h}{\overline{AC}}=\sqrt{3}\Rightarrow\sqrt{3}\,\overline{AC}=h$

$\therefore \overline{AC}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$（公尺）

⑵在$\triangle ABC$ 中

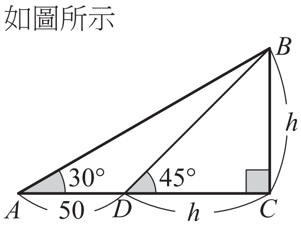
$\because \overline{AB}=12$，$\overline{BC}=h$，$\overline{AC}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$

由商高定理得知 $h^2=12^2+(\dfrac{h}{\sqrt{3}})^2=144+\dfrac{1}{3}h^2$

$\Rightarrow\dfrac{2}{3}h^2=144\Rightarrow h^2=144\times\dfrac{3}{2}=216$

$\therefore h=\sqrt{216}=6\sqrt{6}$（公尺）

11. 如圖所示



設山的高度 $\overline{BC}$ 為 h 公尺

$\triangle BCD$ 中，$\angle CDB=45^\circ=\angle CBD$

$\Rightarrow\overline{DC}=\overline{BC}=h$

$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=30^\circ$

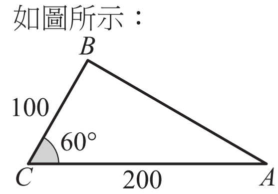
$\tan30^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{h}{50+h}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow\sqrt{3}\,h=50+h\Rightarrow(\sqrt{3}-1)h=50$

$\Rightarrow h=\dfrac{50}{\sqrt{3}-1}=25\left(\sqrt{3}+1\right)$

∴山的高度為 $25\left(\sqrt{3}+1\right)$公尺

12. 如圖所示：



由餘弦定理知：

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\times\overline{BC}\times\cos C$

$=200^2+100^2-2\times200\times100\times\cos60^\circ$

$=40000+10000-40000\times\dfrac{1}{2}=30000$

$\therefore\overline{AB}=\sqrt{30000}=100\sqrt{3}$（公尺）

13. 在$\triangle ABC$ 中，由餘弦定理知：

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$

$=16^2+(15-8\sqrt{3})^2-2\times16\times(15-8\sqrt{3})$

$\times(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

$=16^2+(15-8\sqrt{3})^2+16\sqrt{3}\,(15-8\sqrt{3})$

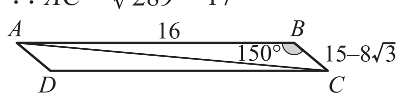
$=16^2+(15-8\sqrt{3})[(15-8\sqrt{3})+16\sqrt{3}]$

$=16^2+(15-8\sqrt{3})(15+8\sqrt{3})$

$=16^2+[(15^2-(8\sqrt{3})^2]=256+225-192$

$=289$

$\therefore\overline{AC}=\sqrt{289}=17$



14. 樹高$=\overline{AB}+\overline{BC}=\dfrac{7}{\cos60^\circ}+7\cdot\tan60^\circ$

$=14+7\times1.732\approx26.124$，選 (C)

15. 如圖，設塔高 $\overline{OH}=h$

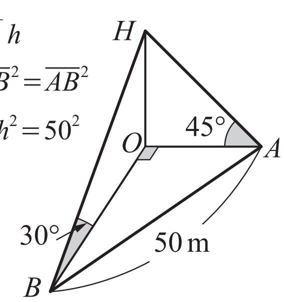
$\triangle OAH$ 中，$\overline{OA}=h$

$\triangle OBH$ 中，$\overline{OB}=\sqrt{3}\,h$

$\triangle OAB$ 中，$\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=\overline{AB}^2$

$h^2+(\sqrt{3}\,h)^2=50^2$，$4h^2=50^2$

$\therefore h=25$（公尺）

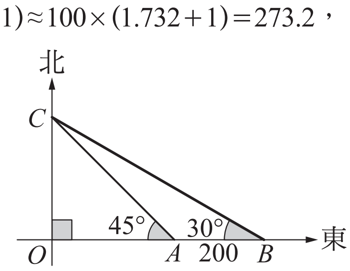


16. 如圖，設 $\overline{OC}=x\Rightarrow\overline{OA}=x$，$\overline{OB}=\sqrt{3}\,x$，

故 $x+200=\sqrt{3}\,x$，$x=\dfrac{200}{\sqrt{3}-1}$

$\Rightarrow x=100(\sqrt{3}+1)\approx100\times(1.732+1)=273.2$，

故選 (D)



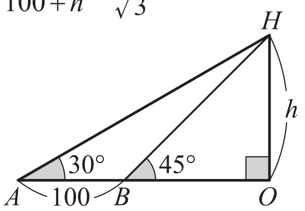
對應課本各章頁碼

17. 設山高為 h 公尺

$\triangle OHB$ 中，$\overline{OB}=\overline{OH}=h$

$\triangle AOH$ 中，$\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{OH}}{\overline{AO}}$

$\dfrac{h}{100+h}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow h=50(\sqrt{3}+1)$（公尺）

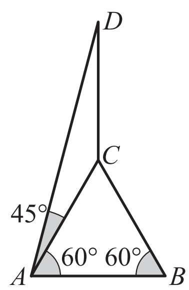


18. 於$\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=\angle CBA=60^\circ$

$\Rightarrow\overline{AC}=\overline{AB}=600$

於$\triangle ACD$ 中，$\angle CAD=45^\circ$，$\angle ACD=90^\circ$

$\Rightarrow\overline{CD}=\overline{AC}=600$

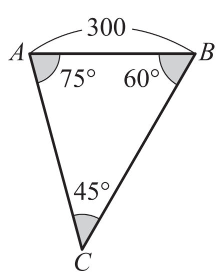


19. $\angle ACB=180^\circ-(75^\circ+60^\circ)=45^\circ$

由正弦定理得：$\dfrac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{300}{\sin 45^\circ}$

$\Rightarrow\overline{AC}=\sin 60^\circ\cdot\dfrac{300}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{300}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

$=150\sqrt{6}$（公尺）



20. $\angle ACB=180^\circ-45^\circ-105^\circ=30^\circ$，

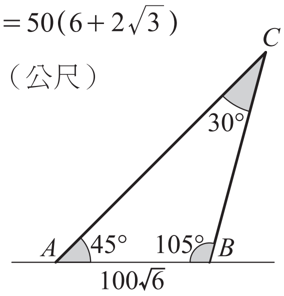
由正弦定理 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}\Rightarrow\dfrac{100\sqrt{6}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 105^\circ}$，

故 $\overline{AC}=\dfrac{100\sqrt{6}}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 105^\circ$

$=200\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$=50(6+\sqrt{12})=50(6+2\sqrt{3})$

$=100(3+\sqrt{3})$（公尺）

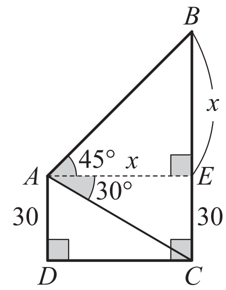


21. 設 $\overline{BE}=x$，則$\triangle ABE$ 中，$\overline{AE}=\overline{BE}=x$，

又在$\triangle ACE$ 中，$\overline{AE}=\sqrt{3}\ \overline{CE}=30\sqrt{3}=x$，

故此建築物高 $\overline{BC}=x+30=30\sqrt{3}+30$

$=30(\sqrt{3}+1)$（公尺）



22. 設 $\overline{CD}=x$（公尺），

則 $\cos B=$

$\dfrac{500^2+200^2-400^2}{2\times 500\times 200}=\dfrac{500^2+(200+x)^2-500^2}{2\times 500\times(200+x)}$

$\Rightarrow 2(200+x)^2-1300(200+x)=0$

$\Rightarrow(200+x)[2(200+x)-1300]=0$

$\Rightarrow(200+x)(2x-900)=0$，

故 $x=-200$（不合）或 $x=450$，

所以 $\overline{CD}$ 是 450 公尺

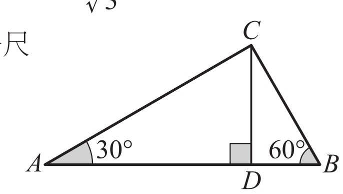
23. 設 $\overline{CD}=h$，$\overline{AD}=x$，$\overline{BD}=40-x$，

則 $\tan 30^\circ=\dfrac{h}{x}$，$\tan 60^\circ=\dfrac{h}{40-x}$，

兩式相除得$\dfrac{1}{3}=\dfrac{40-x}{x}$，$x=30$

所以 $h=x\tan 30^\circ=30\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=10\sqrt{3}$，

故樹高 $10\sqrt{3}$ 公尺



24. 設山高 h，則 $\overline{AD}=\dfrac{h}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}\ h$，

$\overline{BD}=\dfrac{h}{\tan 45^\circ}=h$，$\overline{CD}=\dfrac{h}{\tan 60^\circ}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}h$，

由餘弦定理：

$\cos A=$

$\dfrac{(\sqrt{3}\ h)^2+100^2-h^2}{2\cdot\sqrt{3}\ h\cdot 100}=\dfrac{(\sqrt{3}\ h)^2+200^2-(\dfrac{1}{\sqrt{3}}h)^2}{2\cdot\sqrt{3}\ h\cdot 200}$

$\Rightarrow\dfrac{4}{3}h^2=20000\Rightarrow h=50\sqrt{6}$（公尺）

答案與解析

對應課本各章頁碼

Chapter 1 歷屆試題

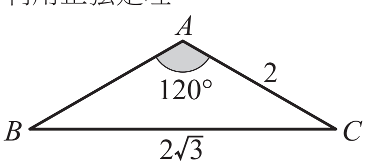
P.20 ～ 22

1.(B)	2.(B)	3.(A)	4.(A)	5.(B)
6.(D)	7.(C)	8.(A)	9.(D)	10.(B)
11.(C)	12.(D)	13.(D)	14.(C)	15.(B)

1. 題目中，$a=2\sqrt{3}$，$b=2$，$\angle A=120^\circ$

 由此三條件只能先求$\angle B$

 利用正弦定理：



 $\Rightarrow \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow \dfrac{\cancel{2}\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}=\dfrac{\cancel{2}1}{\sin B}$

 $\Rightarrow \sqrt{\cancel{3}}\sin B=\sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{\cancel{3}}1}{2}\Rightarrow \sin B=\dfrac{1}{2}$

 $\Rightarrow \angle B=30^\circ$ 或 150°（不合）$\Rightarrow \angle B=30^\circ$

 再推得$\angle C=30^\circ$

 $\because \angle B=\angle C=30^\circ\Rightarrow b=c=2$（等腰）

2. $c=\overline{AB}=\sqrt{3}+1\quad a=\overline{BC}=2$

 $\because b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

 $=(\sqrt{3}+1)^2+2^2-2\times(\sqrt{3}+1)\times 2\times\cos 30^\circ$

 $=(4+2\sqrt{3})+4-4(\sqrt{3}+1)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2$

 $\Rightarrow b=\sqrt{2}$

 又$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow \dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$

 $\Rightarrow \sin A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \angle A=45^\circ$ 或 135°

 但 $c>a\Rightarrow \angle C>\angle A\Rightarrow \angle A=135^\circ$（不合）

 $\therefore \angle A=45^\circ$

3. $\because a：b=\sin A：\sin B$

 又知 $a：b=1：\sqrt{3}$ 且$\angle A=30^\circ$

 $\Rightarrow 1：\sqrt{3}=\sin 30^\circ：\sin B\Rightarrow \sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

 $\Rightarrow \angle B=60^\circ$ 或 120°

 當$\angle B=60^\circ$ 時：

 $\angle C=180^\circ-30^\circ-60^\circ=90^\circ$

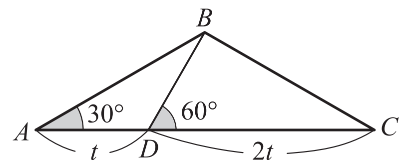
 （不合，已知$\triangle ABC$ 為鈍角三角形）

 當$\angle B=120^\circ$ 時：

 $\angle C=180^\circ-30^\circ-120^\circ=30^\circ$

 故$\angle DCB=30^\circ$

4.



 令 $\overline{AD}=t$、$\overline{DC}=2t$，其中 $t>0$

 $\because \angle BDC=60^\circ\Rightarrow \angle BDA=120^\circ\Rightarrow \angle ABD=30^\circ$

 $\therefore \triangle DAB$ 為等腰三角形$\Rightarrow \overline{DB}=t$

 由餘弦定理知，在$\triangle BCD$ 中，

 $\overline{BC}^2=\overline{DB}^2+\overline{DC}^2-2\overline{DB}\times\overline{DC}\times\cos(\angle BDC)$

 $=t^2+(2t)^2-2\times t\times 2t\times\cos 60^\circ=3t^2$

 $\Rightarrow \overline{BC}=\sqrt{3}\,t$

 由正弦定理，在$\triangle BCD$ 中$\dfrac{\sqrt{3}\,t}{\sin 60^\circ}=\dfrac{t}{\sin C}$

 $\Rightarrow \sin C=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \angle C=30^\circ$ 或 150°（不合）

5. 在$\triangle ADC$ 中，$\tan\angle ADC=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$

 $\Rightarrow \tan 45^\circ=\dfrac{50}{\overline{DC}}$

 $\Rightarrow \overline{DC}=50$

 在$\triangle ABC$ 中，$\tan B=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$

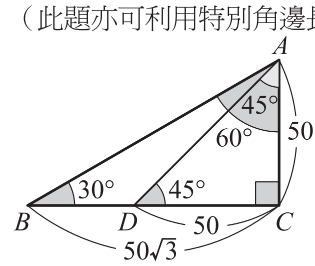
 $\Rightarrow \tan 30^\circ=\dfrac{50}{\overline{BC}}$

 $\Rightarrow \overline{BC}=50\sqrt{3}$

 又 $\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{DC}=50\sqrt{3}-50=50\left(\sqrt{3}-1\right)$

 故 $\overline{BD}=50\left(\sqrt{3}-1\right)$

 （此題亦可利用特別角邊長比快速求出 $\overline{BD}$）



6. 在直角$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

 在直角$\triangle ADC$ 中，$\overline{AD}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

 在$\triangle ABD$ 中，$\cos\theta=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}$

 $=\dfrac{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{10})^2-2^2}{2\times 3\sqrt{2}\times\sqrt{10}}$

 $=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

7. 設三角形三邊長為 a、b、c，且 a 值最大

 $\because$三角形任二邊長的和大於第三邊長

 $\Rightarrow b+c>a\Rightarrow a+b+c>a+a$

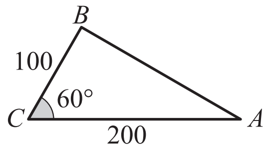
 又已知 $a+b+c=36$

 故得 $2a<36\Rightarrow a<18$

 但 a，b，c 均為正整數

 $\therefore$邊長最大值 $a=17$

8. 如圖所示：



由餘弦定理知：

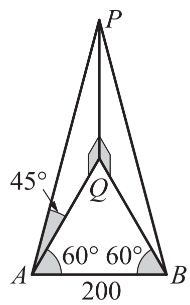
$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\times\overline{BC}\times\cos C$

$=200^2+100^2-2\times200\times100\times\cos60^\circ$

$=40000+10000-40000\times\dfrac{1}{2}=30000$

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{30000}=100\sqrt{3}$（公尺）

9. 設山高為 $\overline{PQ}$，如右圖所示：



在△AQB 中，

$\angle QAB=\angle QBA=60^\circ$

$\Rightarrow$△AQB 為正三角形

$\Rightarrow\overline{AQ}=\overline{AB}=200$

在直角△PQA 中，$\angle PAQ=45^\circ$

$\Rightarrow\overline{PQ}=\overline{AQ}=200$（等腰直角三角形）

$\therefore$山高 $\overline{PQ}=200$ 公尺

10. 在△ABC 中，由餘弦定理知：

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$

$=16^2+(15-8\sqrt{3})^2-2\times16\times(15-8\sqrt{3})$

$\times(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

$=16^2+(15-8\sqrt{3})^2+16\sqrt{3}(15-8\sqrt{3})$

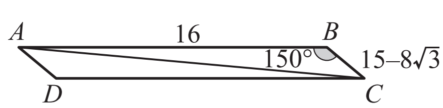
$=16^2+(15-8\sqrt{3})[(15-8\sqrt{3})+16\sqrt{3}]$

$=16^2+(15-8\sqrt{3})(15+8\sqrt{3})$

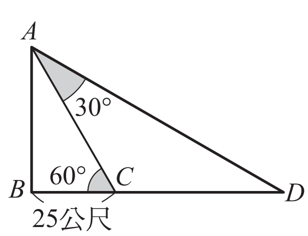
$=16^2+[15^2-(8\sqrt{3})^2]=256+225-192$

$=289$

$\therefore\ \overline{AC}=\sqrt{289}=17$



11.



①直角三角形 ABC 中，

$\angle B=90^\circ$，$\angle BCA=60^\circ$，故$\angle CAB=30^\circ$

$\therefore\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\tan60^\circ=\sqrt{3}$

又 $\overline{BC}=25$ 公尺

$\therefore\ \overline{AB}=25\sqrt{3}$ 公尺

②直角三角形 ABD 中，

$\angle B=90^\circ$，$\angle DAB=60^\circ$，故$\angle D=30^\circ$

$\therefore\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\tan30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

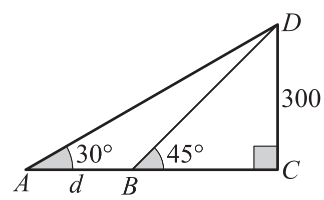
又 $\overline{AB}=25\sqrt{3}$ 公尺

$\therefore\ \overline{BD}=75$ 公尺

12. 令遊客在 A 點測大樓仰角 30°

且在 B 點測大樓仰角 45°

依題意繪製圖形如下：



則 $\overline{BC}：1=300：1$

$\Rightarrow\overline{BC}=300$

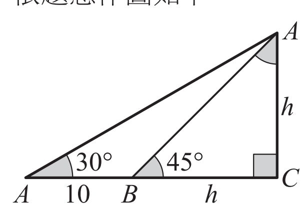
且 $\overline{AC}：\sqrt{3}=300：1$

$\Rightarrow\overline{AC}=300\sqrt{3}$

$\therefore\ d=\overline{AB}=\overline{AC}-\overline{BC}=300\sqrt{3}-300$

$=300(\sqrt{3}-1)$（公尺）

13. 依題意作圖如下：



令水塔高度為 h（公尺），則 $\overline{BC}=h$

在△ADC 中，$\tan30^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{h}{10+h}\Rightarrow\sqrt{3}\,h=10+h$

$\Rightarrow\sqrt{3}\,h-h=10\Rightarrow h(\sqrt{3}-1)=10$

$\Rightarrow h=\dfrac{10}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{10(\sqrt{3}+1)}{2}=5(\sqrt{3}+1)$

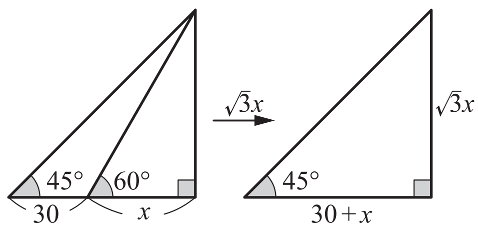
則水塔高為$5(\sqrt{3}+1)$公尺

故選 (D)

對應課本各章頁碼

14. $\sqrt{3}\,x=30+x \Rightarrow x(\sqrt{3}-1)=30$

$x=\dfrac{30}{\sqrt{3}-1}=15\left(\sqrt{3}+1\right)$

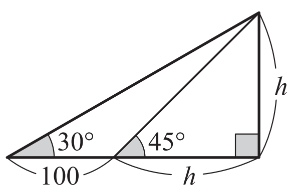


15. $\dfrac{h}{100+h}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}\,h=h+100$

$\Rightarrow h(\sqrt{3}-1)=100$

$\Rightarrow h=\dfrac{100}{\sqrt{3}-1}$

$=50\left(\sqrt{3}+1\right)$



對應課本各章頁碼

Chapter 2 排列組合

2-1 直線排列

重點一 計數原理

範例 1- 老師導引 P.25

設三邊長為正整數 a,b,c，且 $a\geq b\geq c$

因為三角形兩邊之和大於第三邊，所以最大邊長的長度最大值為 9，即 $a\leq 9$

(1)當 $a=9$ 時，邊長序對 $(a,b,c)=$

$(9,9,2),(9,8,3),(9,7,4),(9,6,5)$

有 4 種可能

(2)當 $a=8$ 時，邊長序對 $(a,b,c)=$

$(8,8,4),(8,7,5),(8,6,6)$ 有 3 種可能

(3)當 $a=7$ 時，邊長序對 $(a,b,c)=$

$(7,7,6)$ 有 1 種可能

(4)當 $a\leq 6$ 時，三角形不存在

由加法原理得知，共有 $4+3+1=8$ 個不同的三角形

範例 1- 學生演練 P.25

設三角形三邊長分別為 a、b、c，且 $a\geq b\geq c$，

因 $a+b+c=25$，且 $a+b+c\leq 3a$ 即 $3a\geq 25$，

得 $a\geq 9$，又 $a<b+c$ 故 $2a<a+b+c$，

即 $2a<25$

得 $a\leq 12 \Rightarrow 9\leq a\leq 12$

(1) 當 $a=9$ 時，$b+c=16$，其解為

$(a,b,c)=(9,9,7),(9,8,8)$，共 2 種

(2) 當 $a=10$ 時，$b+c=15$，其解為

$(a,b,c)=(10,10,5),(10,9,6),(10,8,7)$

共 3 種

(3) 當 $a=11$ 時，$b+c=14$，其解為

$(a,b,c)=(11,11,3),(11,10,4),$

$(11,9,5),(11,8,6),(11,7,7)$，共 5 種

(4) 當 $a=12$ 時，$b+c=13$，其解為

$(a,b,c)=(12,12,1),(12,11,2),$

$(12,10,3),(12,9,4),(12,8,5),$

$(12,7,6)$，共 6 種

由加法原理知，共有 $2+3+5+6=16$（種）不全等的三角形

範例 2- 老師導引 P.25

「點數和大於 8」的情形如下：

(1) 點數和是 9：$(6,3)$、$(5,4)$、$(4,5)$、$(3,6)$

共 4 種

(2) 點數和是 10：$(6,4)$、$(5,5)$、$(4,6)$ 共 3 種

(3) 點數和是 11：$(6,5)$、$(5,6)$ 共 2 種

(4) 點數和是 12：$(6,6)$ 共 1 種

這 4 個類別彼此互斥，由加法原理知，點數和大於 8 的情形共有 $4+3+2+1=10$（種）

範例 2- 學生演練 P.25

「點數和小於 7」的情形如下：

(1) 點數和是 2：$(1,1)$ 共 1 種

(2) 點數和是 3：$(1,2)$、$(2,1)$ 共 2 種

(3) 點數和是 4：$(1,3)$、$(2,2)$、$(3,1)$ 共 3 種

(4) 點數和是 5：$(1,4)$、$(2,3)$、$(3,2)$、$(4,1)$

共 4 種

(5) 點數和是 6：$(1,5)$、$(2,4)$、$(3,3)$、$(4,2)$、

$(5,1)$ 共 5 種

由加法原理知，點數和小於 7 的情形共有

$1+2+3+4+5=15$（種）

範例 3- 老師導引 P.26

$12\times 8\times 15=1440$

範例 3- 學生演練 P.26

$4\times 2\times 2=16$

範例 4- 老師導引 P.26

A	D
B	C

(1) A、C 同色

$A\ B\ C\ D$

$5\times 4\times 1\times 4=80$（種）

(2) A、C 異色

$A\ B\ C\ D$

$5\times 4\times 3\times 3=180$（種）

由(1)(2)可得，共有 $80+180=260$ 種

範例 4- 學生演練 P.26

(1) B、D 同色，$A\rightarrow \boxed{BD}\rightarrow C\rightarrow E$

$5\times 4\times 3\times 3=180$

(2) B、D 異色，$A\rightarrow B\rightarrow D\rightarrow C\rightarrow E$

$5\times 4\times 3\times 2\times 2=240$

$\therefore$共有 $180+240=420$ 種塗法

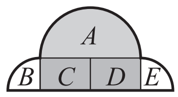
對應課本各章頁碼

範例 5- 老師導引 P.27

$C \to D \to A \to B \to E$

$5 \times 4 \times 3 \times 4 \times 4$

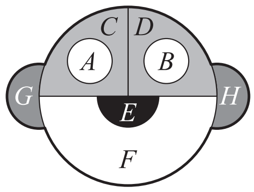
$= 960$



範例 5- 學生演練 P.27

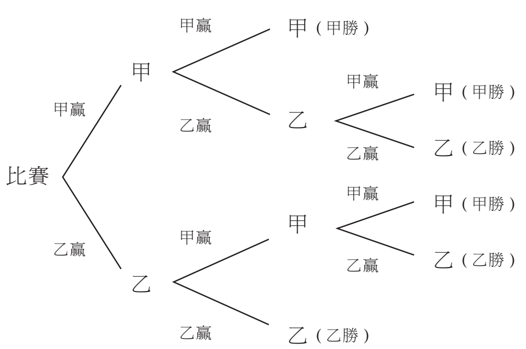
$C \to D \to F \to E \to G \to H \to A \to B$

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4 \times 4 = 17280$



範例 6- 老師導引 P.27

我們利用樹狀圖，將勝負情形表示如下：

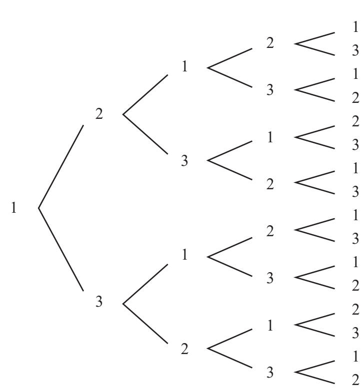


所以共有 6 種情形可分出勝負

範例 6- 學生演練 P.27

畫出樹狀圖如下：

第一天 第二天 第三天 第四天 第五天



(1) 在第五天開出的號碼是 1 的情況有 6 種

(2) 在第五天開出的號碼是 2 的情況有 5 種

重點二　完全相異物的直線排列

範例 1- 老師導引 P.28

$P_5^m : P_3^m = 12 : 1$

$\Rightarrow P_5^m = 12 P_3^m$

$\Rightarrow \dfrac{m!}{(m-5)!} = 12 \times \dfrac{m!}{(m-3)!}$

$\Rightarrow (m-3)(m-4) = 12$

$\Rightarrow m^2 - 7m = 0$，$m(m-7) = 0$

$\Rightarrow m = 0$ 或 7，但 $m \geq 5$，故 $m = 7$

範例 1- 學生演練 P.28

$P_3^n : P_3^{n+2} = 5 : 12 \Rightarrow 12P_3^n = 5P_3^{n+2}$

$\Rightarrow 12n(n-1)(n-2) = 5(n+2)(n+1)n$

$\Rightarrow 12(n-1)(n-2) = 5(n+1)(n+2)$

$\Rightarrow 7n^2 - 51n + 14 = 0 \Rightarrow (n-7)(7n-2) = 0$

$\Rightarrow n = 7$

範例 2- 老師導引 P.29

可視為 6 人中取 4 人各拿一本書，方法數有：

$P_4^6 = 360$（種）

範例 2- 學生演練 P.29

$P_3^{20} = 20 \times 19 \times 18 = 6840$。

範例 3- 老師導引 P.29

(1) $5! = 120$（種）

(2) $\boxed{甲乙}$，丙，丁，戊 $\Rightarrow 4! \times 2! = 48$（種）

範例 3- 學生演練 P.29

A 排首 $6! \to BCD$ 排尾 $6! \times 3$

B 排首 $6! \to C$，D 排尾 $6! \times 2$

全部 –（A，B 排首或 B，C，D 排尾）

+（A，B 排首且 B，C，D 排尾）

$= 7! - 5 \cdot 6! + 5 \cdot 5! = 2040$

範例 4- 老師導引 P.30

(1) $(4! \times 3!) \times 2 = 288$（種）

(2) $4! \times 4! = 576$（種）

(3) 先排男生 4!，有 5 個間隔排女生

$4! \times P_3^5 = 24 \times 5 \times 4 \times 3 = 1440$

對應課本各章頁碼

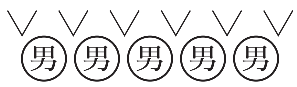
範例 4- 學生演練 P.30

(1) 先排女生，再讓男生從 6 個空隙中插入

$\Rightarrow 5! \times P^6_5 = 86400$

(2) 先排成一列，然後男女相間隔，排在後 5 位的就是第二排

$\Rightarrow 5! \times 5! \times 2 = 28800$



範例 5- 老師導引 P.30

末兩位為 4 的倍數者有 04、12、16、20、24、32、36、40、52、56、60、64，分成含 0 者有 04、20、40、60 四個，及不含 0 者有八個，故有 $4 \times 5 + 8 \times 4 = 20 + 32 = 52$（個）

範例 5- 學生演練 P.30

末兩位為 4 的倍數者有 04、12、16、20、24、32、36、40、52、56、60、64，分成含 0 有 04、20、40、60 四個，及不含 0 有八個

∴所求有 $4 \times 5 \times 4 + 8 \times 5 \times 5 = 280$

重點三　不盡相異物的直線排列

範例 1- 老師導引 P.31

$\dfrac{7!}{2!4!1!} = 105$（種）

範例 1- 學生演練 P.31

(1) $\dfrac{7!}{3!} = 840$

(2) 先排「庭、院、幾、許」，另將 3 個「深」排入 5 個空隙 $4! \times \dfrac{P^5_3}{3!} = 240$

範例 2- 老師導引 P.31

將 0、1、1、3、3、3、4 排成一列

有 $\dfrac{7!}{2!3!} = 420$（個）

而 0 排在首位的排法有 $\dfrac{6!}{2!3!} = 60$（個）

故共可排成 $420 - 60 = 360$（個）七位數

範例 2- 學生演練 P.31

(1) $\dfrac{(3+2+3)!}{3!2!3!} = 560$

(2) $\dfrac{(1+1+2+2+2)!}{2!2!2!} - 1 \times \dfrac{(1+2+2+2)!}{2!2!2!}$

$= 5040 - 630 = 4410$

範例 3- 老師導引 P.32

(1) $\dfrac{8!}{4!4!} = 70$

(2) $\dfrac{8!}{4!4!} - \underbrace{\dfrac{4!}{2!2!} \times \dfrac{4!}{2!2!}}_{\text{（經過 } C \text{ 點）}} = 34$

範例 3- 學生演練 P.32

任意走 $-(A-C-B)-(A-D-B)+(A-C-D-B)$：

$\dfrac{10!}{6!4!} - \left(\dfrac{4!}{2!2!} \times \dfrac{6!}{4!2!}\right) - \left(\dfrac{6!}{3!3!} \times \dfrac{4!}{3!1!}\right)$

$+ \left(\dfrac{4!}{2!2!} \times \dfrac{2!}{1!1!} \times \dfrac{4!}{3!1!}\right)$

$= 88$

範例 4- 老師導引 P.33

跨 1 階 x 次，2 階 y 次，3 階 z 次，

故 $x + 2y + 3z = 8$，x、y、z 為正整數或 0

x	0	2	1	3	5	0	2	4	6	8
y	1	0	2	1	0	4	3	2	1	0
z	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0

$\dfrac{3!}{2!1!} + \dfrac{4!}{2!2!} + \dfrac{4!}{2!} + \dfrac{5!}{3!} + \dfrac{6!}{5!} + \dfrac{4!}{4!} + \dfrac{5!}{3!2!} + \dfrac{6!}{4!2!}$

$+ \dfrac{7!}{6!} + \dfrac{8!}{8!}$

$= 3 + 6 + 12 + 20 + 6 + 1 + 10 + 15 + 7 + 1$

$= 81$

範例 4- 學生演練 P.33

設長鳴 x 次，短鳴 y 次

∴ $2x + y + (x + y - 1) = 15$

∴ $3x + 2y = 16$

x	4	2	0
y	2	5	8

∴ $\dfrac{6!}{4!2!} + \dfrac{7!}{2!5!} + \dfrac{8!}{8!} = 15 + 21 + 1 = 37$

∴共 37 種

答案與解析

對應課本各章頁碼

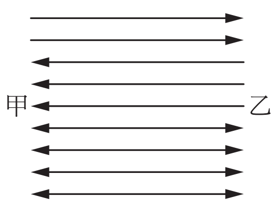
2-1 學習成效驗收 P.34、35

1. $540=2^2\times3^3\times5$，$540=5(2^2\times3^3)$
$(2+1)(3+1)(1+1)=24$（個）
$(2+1)(3+1)=12$（個）

$$\begin{array}{r|l} 2 & 540 \\ 2 & 270 \\ 3 & 135 \\ 3 & 45 \\ 3 & 15 \\ & 5 \end{array}$$

2. 相鄰區域最多者先塗，所以按照 B、$C\to A$、D 的順序來塗顏色
共有 $3\times2\times2\times2=24$（種）塗法

3. ⑴甲到乙選擇單行道→$2\times7=14$
⑵甲到乙選擇雙行道→$4\times6=24$
由⑴、⑵得 $14+24=38$（種）



4. 利用累加法，得方法數為 80

5. 設 A 表甲拿回自己名片，B 表乙拿回自己名片
$\therefore n(A'\cap B')=n(A\cup B)'=n(S)+n(A\cup B)$
$=4!-(3!+3!-2!)=14$（種）

6. 進入的方法共有 $4\times3=12$（種）
出來的方法：
⑴甲由乙進之門出有 $1\times3=3$（種）
⑵甲不由乙進之門出有 $2\times2=4$（種）
故出來的方法有 $3+4=7$（種）
於是甲、乙二人各進出一次的方法共有
$12\times7=84$（種）

7. ⑴ $4\times3=12$（個）
⑵面積為 4，則邊長為 2。有 $3\times2=6$（個）
⑶面積為 9，則邊長為 3。有 $2\times1=2$（個）
⑷ $12+6+2=20$（個）
⑸ $(4+3+2+1)\times(3+2+1)=10\times6=60$（個）

8. ⑴第一個步驟：由五種顏色選一種塗 A 區域，有 5 種方法
第二個步驟：由剩下的四種顏色選一種塗 B 區，有 4 種方法
第三個步驟：由剩下的三種顏色選一種塗 C 區，有 3 種方法
第四個步驟：由剩下的二種顏色選一種塗 D 區，有 2 種方法
由乘法原理知，共有 $5\times4\times3\times2=120$（種）塗色的方法
⑵①當 BD 同色時，按照 $A\to\boxed{BD}\to C\to E$ 的順序塗色，仿⑴的作法，共有 $5\times4\times3\times3=180$（種）
②當 BD 不同色時，按照 $A\to B\to D\to C\to E$ 的順序塗色，仿⑴的作法，
共有 $5\times4\times3\times2\times2=240$（種）
由加法原理知，總共有 $180+240=420$（種）塗色的方法

9. $4^5-3\times3^5+3\times2^5-1$
$=1024-729+96-1=390$

10. 1□□□□⇒ $4!=24$
20□□□⇒ $3!=6$，$24+6=30$
⇒第 31 個數為 21034

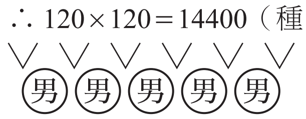
11. 原式⇒ $(n+2)(n+1)n(n-1)=72\times n(n-1)$
⇒ $(n+2)(n+1)=72$
$n=7$ 或 -10（-10 不合）
⇒ $P_3^{n+1}=P_3^8=8\times7\times6=336$

12. 可視為 6 人中取 4 人各拿一本書，方法數有：
$P_4^6=360$（種）

13. 4 男先排 4!　　男　男　男　男
4 女排①②③④　①　②　③　④
或 a b c d　a　b　c　d
共有 $2\times4!\times4!=1152$（種）方法

14. 先排男生 4!，有 5 個間隔排女生
⇒ $4!\times P_3^5=24\times5\times4\times3=1440$

15. 5 位男生先排成一列 $5!=120$
再排入 3 位女生：$P_3^6=120$
$\therefore 120\times120=14400$（種）



對應課本各章頁碼

16. 八天中每人各打掃二天的排法數，就是考慮將「甲甲乙乙丙丙丁丁」全取做直線排列的排列數$=\dfrac{8!}{2!2!2!2!}=2520$

17. 2紅3白另一個×（表示沒得）$\dfrac{6!}{2!3!1!}=60$（種）

18. ⑴$\dfrac{7!}{4!3!}=35$

⑵分為 $A\to C\to B$ 三段路徑：

$\dfrac{3!}{2!1!}\times\dfrac{4!}{2!2!}=3\times6=18$

19. （任意排）－（0 排首位）：

$\dfrac{7!}{2!\times3!}-\dfrac{6!}{2!\times3!}=420-60=360$

20. ⑴ $6!-(3\times5!-3\times4!+3!)=426$

⑵先排（甲、乙）、戊、己，再插入丙、丁：

$(3!\times2!)\times P^4_2=144$

⑶全部－（甲、丙）相鄰－（甲、丁）相鄰＋（甲與丙、丁相鄰）：

$6!-5!\times2-5!\times2+4!\times2=288$

⑷甲、乙、丙先排定，再分別插入另三人：

$4\times3!+P^3_2\times4\times3+4\times3\times2=120$

21. ⑴先選位置再入座$\Rightarrow 6\times3!=36$

⑵先排○○○○○，再插入空隙$\Rightarrow P^6_3=120$

2-1 實力測驗 P.36～38

1.(B)	2.(A)	3.(C)	4.(A)	5.(B)
6.(C)	7.(C)	8.(A)	9.(C)	10.(C)
11.(C)	12.(B)	13.(C)	14.(C)	15.(C)
16.(D)	17.(C)	18.(B)	19.(A)	20.(B)
21.(D)	22.(B)	23.(C)		

1. 利用累加法得知共有 5 種方法

2. $z=0$ 時，$x+2y=8$，(x,y) 有 $(0,4)$，$(2,3)$，$(4,2)$，$(6,1)$，$(8,0)$

$z=1$ 時，$x+2y=5$，(x,y) 有 $(1,2)$，$(3,1)$，$(5,0)$

$z=2$ 時，$x+2y=2$，(x,y) 有 $(0,1)$，$(2,0)$

∴共有 $5+3+2=10$ 組

3. $x=1$ 時，$y=1$，$z=5$；$y=2$，$z=3$；$y=3$，$z=1$

$x=2$ 時，$y=1$，$z=2$

∴共有 4 組

4. $5+3+2=10$

5. $5\times4=20$ 種（進 5 種，出 4 種）

6. 由乘法原理知：共有 $3\times2\times5=30$ 種

7. 偶數者個位數必為 0、2、4、6、8

不得為 0

□ □ □

只能用 0、2、4、6、8

∴三位數中，偶數的有 $9\times10\times5=450$（個）

8.

		甲上山方法		甲下山方法		乙上山方法		乙下山方法	
⑴	乙由甲下山路線上山	5	×	4	×	1	×	4	＝80
⑵	乙不由甲下山路線上山	5	×	4	×	3	×	3	＝180

∴ $80+180=260$（種）

9. 百位不得排 0，方法有 9 種；十位必排 7，方法有 1 種；個位必排偶數，方法有 5 種，依據乘法原理，共有 $9\times1\times5=45$ 個

10. 10 元付款方法有 4 種

①不付②付 1 張③付 2 張④付 3 張，同理 50 元 4 種，100 元 5 種，但須扣除都不付的情形

∴ $4\times4\times5-1=79$（種）

11. 不經過 C 點的走法

＝（全部走法）－（經過 C 點的走法）

$=\dfrac{(5+4)!}{5!4!}-\dfrac{(2+1)!}{2!1!}\times\dfrac{(3+3)!}{3!3!}=66$（種）

12. ∵三個相連的座位有 6 種情形

∴ $6\times3!=36$（種）

13. $P^4_4=\dfrac{4!}{0!}=4\times3\times2\times1=24$（個）

14. 千位數字是 1 的情形有 6 種，是 2、3、4 的情形也均是 6 種

$\boxed{1}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$

$3\times2\times1$

同理百位、十位、個位是 1、2、3、4 的情形均 6 種

∴總和$=(1+2+3+4)\times(1000+100+10+1)\times6$

$=66660$

15. 全部排法－以 0 為首的排法

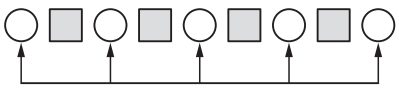
$\dfrac{8!}{3!2!3!}-\dfrac{7!}{2!2!3!}=560-210=350$（種）

16. $\dfrac{9!}{6!3!}=84$（種）

17. $6!-5!-5!+4!=504$

18. 個位數為 0 時：有 $P_3^5=60$（個）
個位數為 5 時：有 $4\times P_2^4=48$（個）
$\therefore$ 5 的倍數共有 $60+48=108$（個）

19. 利用插空法：



(5個間隔，選3個排入3姊妹)

$\therefore$排法共有 $4!\times P_3^5=24\times 60=1440$（種）

20. 千位數字為 2 者有$\dfrac{3!}{2!}=3$ 個；
千位數字為 6 者有 $3!=6$ 個
$\therefore$共有 $3+6=9$ 個

21. $4\times n(n-1)(n-2)=5(n-1)(n-2)(n-3)$
$\Rightarrow 4n=5(n-3)$
$\therefore\ n=15$

22. $\dfrac{8!}{5!\times 2!\times 1!}=168$ 種

23. 四個選項中，每一個選項可分選與不選 2 種選法，故至少選一個的方法有 $2^4-1=15$（種）

答案與解析

對應課本各章頁碼

2-2 重複排列

重點一 重複排列

範例 1- 老師導引 P.39

⑴ 因為每一件玩具都要分出去，所以在考慮每件玩具的分法時，由於每件玩具均可分給甲、乙、丙、丁任一人，每件玩具的分法有 4 種，故 5 件不同玩具任意分給 4 人的方法有：

$4\times4\times4\times4\times4=4^5=1024$（種）

⑵ 甲至少得一件的分法

＝（任意給的分法）–（甲未得的分法）

$=4^5-3^5=781$（種）

範例 1- 學生演練 P.39

⑴ 每一件玩具均有 3 種給法

故分法有 $3\times3\times3\times3\times3=3^5=243$（種）

⑵ 甲至少得 1 件的分法

＝（任意給法）–（甲一件未得的分法）

＝（任意給法）

–（任意分給乙、丙二人的分法）

$=3^5-2^5=211$（種）

範例 2- 老師導引 P.40

4 人安全渡法＝（任意選船）–（4 人同船）

$=2^4-2=16-2=14$（種）

範例 2- 學生演練 P.40

⑴ $3^4=81$（種）

⑵ $3^6-3=726$（種）

↑ $(6,0,0)$，$(0,6,0)$，$(0,0,6)$

⑶ $3^7-3-7\times3\times2=2187-3-42=2142$

↑ ↑

$(7,0,0)\,(6,1,0)$

範例 3- 老師導引 P.40

0 不可排首 ⇒ 百位先排

□ □ □

百位：1、3、5、7、9

十位：0、1、3、5、7、9

個位：0、1、3、5、7、9

則共可組成三位數 $5\times6\times6=180$ 個

範例 3- 學生演練 P.40

討論每個位置的排法：每個位置均有 6 種方法，故共有 $6\times6\times6=216$ 種可能的號碼鎖

範例 4- 老師導引 P.41

因為每次取旗均有紅、黃、綠、白 4 種方法，所以連取 3 次的排列數有 $4\times4\times4=64$ 種

即可做成 64 種信號

範例 4- 學生演練 P.41

6 種酒（不限倒 1 次），倒入 4 個不同酒杯，即每個酒杯均有 6 種酒可供選擇倒入

∴有 $6\times6\times6\times6=6^4=1296$ 種倒法

2-2 學習成效驗收 P.42、43

1. □□□

∵三位數中的百位、十位、個位三個位置，每個位置均有 5 種選擇

∴共有 $5\times5\times5=125$ 個

2. $7^3=343$（種）

3. （安全過渡方法）

＝（任意載法）–（5 人同搭一船）

$=3^5-3=240$（種）

4. ∵每一個人均有 3 種出拳的選擇

∴共有 $3\times3\times3\times3\times3=3^5=243$ 種結果

5.

百	十	個
1	0	0
2	1	1
3	2	2
4	3	3
	4	4

有 $4\times5\times5=100$ 個

6. ⑴ $4^5=1024$（種）

⑵ $4^5-4=1020$（種）

7. 任意分法 $=5^3=125$（種）

甲至少得一件＝任意分法－甲未得

$=5^3-4^3=125-64=61$（種）

8. 每個酒杯可以接受 3 種倒法

∴ $3\times3\times3\times3\times3=3^5=243$（種）

9. 全部分法 – 同一籃放 5 個的情況

$=3^5-3=240$（種）

對應課本各章頁碼

10. $4^5=1024$（種）

11. $2^5-1=31$（種）

12. 甲、乙、丙三人，每人均有 4 種選擇
由乘法原理知：
共有 $4\times4\times4=4^3=64$ 種可能

13. 安全過渡的方法=（任意坐法）－（6 人坐同一艘船的坐法）$=3^6-3=726$ 種

14. 有 $3^4=81$ 種

15. ∵百位數有 4 種選擇，十位、個位數各有 5 種選擇
$\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$
∴ $4\times5\times5=100$ 個

2-2　實力測驗　P.44、45

1.(D)	2.(B)	3.(B)	4.(B)	5.(B)
6.(B)	7.(D)	8.(D)	9.(C)	10.(D)
11.(B)	12.(D)	13.(D)	14.(B)	15.(A)
16.(B)	17.(D)			

1. 有 $5^3=125$ 個

2. 0 不可排首位，6 排末位
$\boxed{\ }\ \boxed{\ }\ \boxed{6}$
$9\times10\times1=90$ 個

3. 酒可重複倒，酒杯不同
每個酒杯均有 4 種酒的選擇，
則共有 $4\times4\times4=4^3=64$ 種倒法

4. （甲至少分得 1 件的方法）
=（任意給法）－（甲均未分得的方法）
$=4^5-3^5=781$ 種

5. ⑴百位數字為 2 的個數有 $9\times9=81$ 個（數字可以重複）
⑵十位數字與個位數字為 2 的個位數均為 $8\times9=72$（個）（0 不可為百位）
∴ $81+72+72=225$（個）

6. 至多只能搭載 3 人＝全部－搭載 4 人的方法
$=3^4-3=81-3=78$（種）

7. （全部）－（8 人同乘一船）－（7 人同乘一船，另一人另乘一船）
$=3^8-3\times1-8\times6=6510$（種）

8. $\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$
$2\times3\times3\times3\times3\times3=486$（個）
↘
0 不可放首位

9. 每個人都有 3 種猜法
∴ $3\times3\times3\times3\times3=3^5$（種）

10. $5^4=625$（種）

11. $\boxed{\ }\ \boxed{\ }\ \boxed{\ }$
$4\times4\times4=64$

12. （甲至少得 1 件）
=（任意給法）－（甲均未分得）
$=4^5-3^5=1024-243=781$（種）

13. 【方法一】
∵每封信均有 9 個郵筒可投入
∴ 8 封信投法共有 $\underbrace{9\times9\times9\times9\times9\times9\times9\times9}_{8\text{ 個}}=9^8$ 種

【方法二】
可重複者為郵筒，不可重複者為信
則共有 $n^r=$（可重複者）$^{\text{不可重複者}}=9^8$ 種

14. $3\times3\times3\times3=81$（種）

15. 甲至少得一包=任意給法−甲均未分得的方法
$=3^6-2^6=729-64=665$（種）

16. 先分給甲一包，再將剩下的五包餅乾分給乙、丙
$\Rightarrow6\times2^5=192$（種）

17. $\boxed{\cancel{0}}\boxed{4}\boxed{\ }+\boxed{\cancel{0}}\boxed{\ }\boxed{4}-\boxed{\cancel{0}}\boxed{4}\boxed{4}$
$=9\times1\times10+9\times10\times1-9\times1\times1=171$（個）

對應課本各章頁碼

2-3 組合

重點一 組合

範例 1- 老師導引 P.46

(1) $C_2^{10}=\dfrac{10\times 9}{2\times 1}=45$

(2) $C_3^{10}=\dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}=120$

(3) $C_7^{10}=C_3^{10}=120$

(4) $C_{10}^{10}=\dfrac{10!}{0!\,10!}=1$

範例 1- 學生演練 P.46

(1) $C_2^{5}=\dfrac{5\times 4}{2\times 1}=10$

(2) $C_3^{5}=\dfrac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}=10$

(3) $C_7^{8}=\dfrac{8!}{1!\,7!}=\dfrac{8\times 7!}{1\times 7!}=8$

(4) $C_8^{8}=\dfrac{8!}{0!\,8!}=1$

範例 2- 老師導引 P.47

(1) $\because C_3^n=C_8^n$，且 $3\neq 8$　$\therefore n=3+8=11$

(2) ① $3n=5n+8\Rightarrow n=-4$（不合）

② $3n+(5n+8)=40\Rightarrow 8n=32$

$\Rightarrow n=4$　$\therefore n=4$

(3) 原式

$\Rightarrow 3\times\dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3\times 2\times 1}$

$=10\times\dfrac{(n-2)\times(n-3)}{2\times 1}$

$\Rightarrow n(n-1)=10(n-3)\Rightarrow n^2-11n+30=0$

$\Rightarrow (n-5)(n-6)=0$

又 $n\geq 4$　$\therefore n=5$ 或 $n=6$

範例 2- 學生演練 P.47

(1) $\because C_8^n=C_{12}^n$，$8\neq 12\Rightarrow 8+12=n\Rightarrow n=20$

(2) ① $2n=n+8\Rightarrow n=8$

② $2n+(n+8)=47\Rightarrow 3n=39\Rightarrow n=13$

故 $n=8$ 或 13

(3) 原式

$\Rightarrow 15\times\dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3\times 2\times 1}$

$=2\times(n+1)\times n\times(n-1)$

$\Rightarrow 5n-10=4n+4$

又 $n\geq 3$　$\therefore n=14$

範例 3- 老師導引 P.47

$C_1^8+C_2^8+C_3^8+\cdots\cdots+C_8^8=2^8-1=255$

範例 3- 學生演練 P.47

$C_1^9+C_3^9+C_5^9+C_7^9+C_9^9=\dfrac{2^9}{2}=2^8=256$

範例 4- 老師導引 P.48

$\because C_0^4=1=C_0^5$

原式 $=C_0^5+C_1^5+C_2^6+C_3^7+C_4^8+C_5^9+C_6^{10}$

$=C_1^6+C_2^6+C_3^7+C_4^8+C_5^9+C_6^{10}$

$=C_2^7+C_3^7+C_4^8+C_5^9+C_6^{10}$

$=C_5^{10}+C_6^{10}=C_6^{11}=\dfrac{11!}{6!\,5!}$

$=\dfrac{11\times 10\times 9\times 8\times 7}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}=462$

範例 4- 學生演練 P.48

$\because C_0^5=C_0^6$，

原式 $=(C_0^6+C_1^6)+C_2^7+C_3^8+C_4^9+C_5^{10}$

$=(C_1^7+C_2^7)+C_3^8+C_4^9+C_5^{10}$

$=(C_2^8+C_3^8)+C_4^9+C_5^{10}$

$=(C_3^9+C_4^9)+C_5^{10}=C_4^{10}+C_5^{10}$

$=C_5^{11}$

$=462$

範例 5- 老師導引 P.48

(1) 即為 10 件中取 5 件的組合數有

$C_5^{10}=\dfrac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}=252$（種）

(2) 必含甲本，故只須從剩下的 9 本中任選 4 本即可，所以選法有

$C_4^{9}=\dfrac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}=126$（種）

(3) 甲、乙二本不能入選，故須從剩下的 8 本中任選 5 本，所以選法有

$C_5^{8}=C_3^{8}=\dfrac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}=56$（種）

範例 5- 學生演練 P.48

(1) 即為 6 件中取 4 件的組合數有

$C_4^{6}=\dfrac{6\times 5\times 4\times 3}{4\times 3\times 2\times 1}=15$（種）

(2) 必含甲本，故只須從剩下的 5 本中任選 3 本即可，所以選法有

$C_3^{5}=\dfrac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}=10$（種）

(3) 甲、乙二本不能入選，故須從剩下的 4 本中任選 4 本，所以選法有

$C_4^4=\dfrac{4!}{4!\,0!}=1$（種）

範例 6- 老師導引 P.49

(1) 所選出的 5 人沒有前後順序之別，此為組合問題，故有

$C_5^9=\dfrac{9!}{5!\,4!}=\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$ 種方法

(2) 先從 5 位女生中選出 3 人有 C_3^5 種方法
再從 4 位男生中選出 2 人有 C_2^4 種方法
故其中 3 人為女生有

$C_3^5\ C_2^4=\dfrac{5!}{3!\,2!}\times\dfrac{4!}{2!\,2!}=10\times6=60$ 種方法

(3) 因為男女生至少各有 2 人，所以分成兩種情形：

① 選出 2 位男生和 3 位女生有

$C_2^4\ C_3^5=\dfrac{4!}{2!\,2!}\times\dfrac{5!}{3!\,2!}=6\times10=60$ 種方法

② 選出 3 位男生和 2 位女生有

$C_3^4\ C_2^5=\dfrac{4!}{3!\,1!}\times\dfrac{5!}{2!\,3!}=4\times10=40$ 種方法

故男女生至少各有 2 人有 $60+40=100$ 種方法

範例 6- 學生演練 P.49

(1) 所選出的 6 人沒有前後順序之別，此為組合問題，故有

$C_6^{11}=\dfrac{11!}{6!\,5!}=\dfrac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1}=462$ 種方法

(2) 先從 6 位女生中選出 4 人有 C_4^6 種方法
再從 5 位男生中選出 2 人有 C_2^5 種方法
故其中 4 人為女生有

$C_4^6\ C_2^5=\dfrac{6!}{4!\,2!}\times\dfrac{5!}{2!\,3!}=15\times10=150$ 種方法

(3) 因為男女生至少各有 2 人，所以分成三種情形：

① 選出 2 位男生和 4 位女生有

$C_2^5\ C_4^6=\dfrac{5!}{2!\,3!}\times\dfrac{6!}{4!\,2!}=10\times15$
$=150$ 種方法

② 選出 3 位男生和 3 位女生有

$C_3^5\ C_3^6=\dfrac{5!}{3!\,2!}\times\dfrac{6!}{3!\,3!}=10\times20$
$=200$ 種方法

③ 選出 4 位男生和 2 位女生有

$C_4^5\ C_2^6=\dfrac{5!}{4!\,1!}\times\dfrac{6!}{2!\,4!}=5\times15$
$=75$ 種方法

故男女生至少各有 2 人有 $150+200+75$
$=425$ 種方法

範例 7- 老師導引 P.50

(1) $C_3^3+C_3^3+C_3^4=1+1+4=6$ 種
(2) $C_1^3\times C_1^3\times C_1^4=36$ 種
(3) 至少有一紅球
＝（任意選）－（均無選紅球）
$=C_3^{10}-C_3^7=120-35=85$ 種

範例 7- 學生演練 P.50

(1) $C_3^4+C_3^3=4+1=5$ 種
(2) $C_1^4\times C_1^3\times C_1^2=24$
(3) 至少有一紅球
＝（任意選）－（均無選紅球）
$=C_3^9-C_3^6=84-20=64$ 種

範例 8- 老師導引 P.50

(1) $C_2^5-C_2^3+1=8$（條）

共線三點決定直線數
三點決定的直線數
五點決定的直線數

(2) $C_3^5-C_3^3=9$

三點決定的三角形數
五點決定的三角形數

範例 8- 學生演練 P.50

(1) 平面上，任意相異兩點可決定一條直線
∴所求 $=C_2^{10}-C_2^4+1=45-6+1=40$ 條
(2) 平面上，任意不共線的三點可決定一個三角形
∴所求 $=C_3^{10}-C_3^4=120-4=116$ 個

範例 9- 老師導引 P.51

$C_2^5\times C_2^6=150$（個）

範例 9- 學生演練 P.51

$C_2^4\times C_2^7=6\times21=126$（個）

對應課本各章頁碼

範例 10- 老師導引 P.51

(1) $C_2^{10}\times C_3^8\times C_5^5=2520$（種）

(2) $C_2^{10}\times C_3^8\times C_5^5=2520$（種）

範例 10- 學生演練 P.51

(1) $C_3^{10}\times C_3^7\times C_4^4=4200$（種）

(2) $\dfrac{C_3^{10}\times C_3^7\times C_4^4}{2!}=2100$（種）

範例 11- 老師導引 P.51

(1) $C_3^9\times C_3^6\times C_3^3=1680$（種）

(2) $C_1^7\times C_1^3\times C_3^6\times C_3^3=420$（種）

(3) $1680-420=1260$（種）

範例 11- 學生演練 P.51

(1) $\dfrac{C_3^9\times C_3^6\times C_3^3}{2!}=280$（種）

(2) $C_1^7\times\dfrac{C_3^6\times C_3^3}{2!}=70$（種）

(3) $280-70=210$（種）

重點二　組合總數

範例 1- 老師導引 P.52

所求 $=C_1^{12}+C_2^{12}+C_3^{12}+\cdots+C_{12}^{12}$
$=2^{12}-1=4095$

範例 1- 學生演練 P.52

所求 $=C_1^8+C_2^8+\cdots+C_8^8$
$=2^8-1=255$

範例 2- 老師導引 P.52

所求 $=(8+1)(6+1)(4+1)-1=314$

範例 2- 學生演練 P.52

所求 $=(7+1)(5+1)(4+1)-1=239$

2-3 學習成效驗收 P.53 ～ 56

1. 在平面上，不共線三點可決定一個三角形，又 A、B、C 三點所決定的 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ACB$ 是同一個三角形，沒有次序可言，所以這是組合的問題
由組合公式知：
共可作成 $C_3^8=\dfrac{8!}{3!5!}=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$ 個三角形，又任二相異點可決定一直線
故可決定 $C_2^8=\dfrac{8!}{2!6!}=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$ 條直線

2. $C_1^{13}\times C_3^4=52$（種）
選出的號碼中選 3 種花色
13 個號碼中選一個

3. $2^7-1=128-1=127$（種）

4. (1) $C_2^{10}-C_2^4+1=\dfrac{10!}{8!2!}-\dfrac{4!}{2!2!}+1$
$=45-6+1=40$（條）
(2) $C_3^{10}-C_3^4=\dfrac{10!}{7!3!}-\dfrac{4!}{1!3!}$
$=120-4=116$（個）

5. 【方法一】
由 5 本不同的雜誌中，任取 1 本的方法有 C_1^5 種；任取 2 本的方法有 C_2^5 種；任取 3 本的方法有 C_3^5 種；任取 4 本的方法有 C_4^5 種；任取 5 本的方法有 C_5^5 種，所以每次至少選取 1 本的選法共有
$C_1^5+C_2^5+C_3^5+C_4^5+C_5^5$
$=5+10+10+5+1=31$ 種
【方法二】
每 1 本雜誌均可「選取」或「不選取」兩種方式，而 5 本雜誌任意選取的方法有 $2\times2\times2\times2\times2=2^5$ 種，所以每次至少選取 1 本的選法共有 $2^5-1=31$ 種

6. (1) $C_4^6\times2^4=240$（種）
(2) $C_1^6\times C_2^5\times2^2=240$（種）
(3) $C_2^6=15$（種）

7. $C_2^4\times C_1^3\times C_2^5=\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{3!}{1!2!}\times\dfrac{5!}{2!3!}=180$ 種

8. 因為試題選做的方法與次序無關，由 12 題中任選 8 題做答，選題方法有
$C_8^{12}=\dfrac{12!}{8!4!}=\dfrac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}=495$ 種
又規定前 4 題任選 2 題，後 8 題任選 6 題的選題方法有
$C_2^4\times C_6^8=\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{8!}{6!2!}=6\times28=168$ 種

9. 由 10 人中選 6 人參加比賽，所選 6 人必含甲、乙，但不含丙，故只要從甲、乙、丙外，所剩 7 人中任選 4 人即可，所求選法有
$C_4^7=\dfrac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35$ 種

答案與解析

對應課本各章頁碼

10. ∵停 1 站的方法有C_1^6
停 2 站的方法有C_2^6
⋮
停 6 站的方法有C_6^6
∴列車 6 站至少停靠一站的情形有
$C_1^6+C_2^6+C_3^6+C_4^6+C_5^6+C_6^6=2^6-1=63$ 種

11. 先由 6 對夫妻中選出 4 對夫妻，其選法有 $C_4^6=\dfrac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1}=15$ 種，再由所選出的 4 對夫妻中，每對夫妻選出 1 人，選法有 $C_1^2\times C_1^2\times C_1^2\times C_1^2=16$ 種，由乘法原理知：所選 4 人中沒有任一夫妻檔的情形有
$15\times16=240$ 種

12. ∵ 500 元 2 張等於 1000 元
原題視為 1000 元 3 張，500 元 1 張，100 元 2 張，10 元 4 張
$4\times2\times3\times5-1=119$ 種

13. 至少含 2 紅球
＝全部－含 1 紅球－皆無紅球
$=C_5^8-C_1^3\times C_4^5-C_5^5=56-15-1=40$（種）

14. ⑴因所選必含某指定本，故只需從剩餘 7 本中任選 4 本即可，所求選法有
$C_4^7=\dfrac{7!}{4!3!}=\dfrac{7\times6\times5\times4}{4\times3\times2\times1}=35$ 種
⑵因所選不准含某指定二本，故必須從剩餘 6 本中任選 5 本，所求選法有
$C_5^6=\dfrac{6!}{5!1!}=\dfrac{6\times5\times4\times3\times2}{5\times4\times3\times2\times1}=6$ 種

15. ⑴$C_3^9=84$
某指定本必選，從餘 9 本再任選 3 本
⑵$C_4^8=70$
去除指定 2 本，再從餘 8 本任選 4 本

16. 仟元鈔 2 張：可不取、取 1 張、取 2 張，共有 3 種取法
伍佰元鈔 3 張：可不取、取 1 張、取 2 張、取 3 張，共有 4 種取法
佰元鈔 5 張：可不取、取 1 張、取 2 張、取 3 張、取 4 張、取 5 張，共有 6 種取法
由乘法原理知：
每次至少取一張的取法共有 $3\times4\times6-1=71$ 種
《註》因每次至少取一張，故須扣除全部都不取的 1 種方法

17. $\because C_m^n=\dfrac{P_m^n}{m!}\Rightarrow m!=\dfrac{P_m^n}{C_m^n}=\dfrac{3024}{126}=24\Rightarrow m=4$
又 $P_4^n=3024=9\times8\times7\times6\Rightarrow n=9$
$\therefore n-m=9-4=5$

18. 分析：
⑴若一自然數為 5 的倍數，則其個位數必為 0 或 5
⑵分成「0」與「非 0」加以討論
①末位（個位）數為 0
$\square\square\square0\Rightarrow5\times4\times3\times1=60$
②末位（個位）數為 5
$\square\square\square5\Rightarrow4\times4\times3\times1=48$
$\therefore 60+48=108$ 個

19. 因為 $3\times P_3^{n-1}=8\times C_5^n$
故得 $3\times\dfrac{(n-1)!}{(n-1-3)!}=8\times\dfrac{n!}{5!(n-5)!}$
$\Rightarrow3\times\dfrac{(n-1)!}{(n-4)\times(n-5)!}=8\times\dfrac{n\times(n-1)!}{5!(n-5)!}$
$\Rightarrow\dfrac{3}{n-4}=\dfrac{n}{15}\Rightarrow n^2-4n-45=0$
$\Rightarrow(n-9)(n+5)=0$
但 n 為自然數，故得 $n=9$

20. ⑴$C_5^{10}=\dfrac{10!}{5!5!}=252$（種）
⑵$C_3^8=\dfrac{8\times7\times6}{1\times2\times3}=56$（種）

21. ⑴$C_2^7=\dfrac{7!}{2!(7-2)!}=21$（種）
⑵$C_2^6=\dfrac{6!}{2!(6-2)!}=15$（種）

22. 圖中平行四邊形是由 2 橫線與 2 斜線所圍成
2 橫線選法有C_2^5種，2 斜線選法有C_2^4種
共有$C_2^5\times C_2^4=\dfrac{5\times4}{1\times2}\times\dfrac{4\times3}{1\times2}=60$ 個平行四邊形

23. （三奇）＋（二偶一奇）$=C_3^6+C_2^5\times C_1^6=80$

24. 搭配方式：
甲、乙、丙 配 丁、戊 ：$C_1^3\,C_1^2=6$
甲、乙、丙 配 己 ：$C_1^3\,C_1^1=3$
丁、戊 配 己 ：$C_1^2\,C_1^1=2$
共有 11 種，故選 (C)

25. $C_3^{11}-C_3^5-C_3^6=165-10-20=135$，故選 (A)

26. $C_6^{43}+C_5^{43}\times C_1^6+C_4^{43}\times C_2^6$，故選 (C)

27. $xxy\Rightarrow C_2^6\times2\times\dfrac{3!}{2!}=90$，故選 (A)

28. $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=C_1^2\times C_1^5\times C_1^3\times C_1^3+C_1^4\times C_1^3\times C_1^4\times C_1^2$

$-C_1^2\times C_1^3\times C_1^3\times C_1^2$

$=90+96-36=150$

29. 4 班：甲乙丙丁

1 1 1 3

$\Rightarrow C_1^6\times C_1^5\times C_1^4\times C_3^3\times\dfrac{4!}{3!}=480$

1 1 2 2

$\Rightarrow C_1^6\times C_1^5\times C_2^4\times C_2^2\times\dfrac{4!}{2!2!}=1080$

∴所求為 $480+1080=1560$

【另解】

利用排容原理

$1\times4^6-4\times3^6+6\times2^6-4\times1^6+1\times0^6$

$=4096-2916+384-4+0=1560$

30. A B C

甲乙

1 3 3

$\Rightarrow \underbrace{C_1^3}_{\text{甲、乙分法}}\times C_1^7\times C_3^6\times C_3^3=420$

31. 選出 2 本英文書 3 本中文書的方法有

$C_2^6\times C_3^5=150$（種），將此 5 本書作直線排列，有 5! 種排法，故所求排法為

$C_2^6\times C_3^5\times5!=18000$（種）

32. 選出 2 男 1 女的方法有$C_2^3\times C_1^2=6$（種），將此 3 人作直線排列，有 3! 種排法，故所求排法為$C_2^3\times C_1^2\times3!=36$（種）

33. ⑴由 6 名男生中選出 2 人的組合數為

$C_2^6=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

由 4 名女生中選出 3 人的組合數為

$C_3^4=\dfrac{4\times3\times2}{3\times2\times1}=4$

由乘法原理，共有 $15\times4=60$（種）

⑵女生至少 2 人的情形有「3 男 2 女」，「2 男 3 女」和「1 男 4 女」三種：

「3 男 2 女」的選法有

$C_3^6\times C_2^4=20\times6=120$ 種

「2 男 3 女」的選法有

$C_2^6\times C_3^4=15\times4=60$ 種

「1 男 4 女」的選法有

$C_1^6\times C_4^4=6\times1=6$ 種

因此總共有 $120+60+6=186$ 種選法

34. 從 1、3、5、7、9 中任取 3 個數字的組合數為$C_3^5=10$

從 2、4、6、8 中任取 2 個數字的組合數為

$C_2^4=6$

將這五個不重複的數字直線排列的排列數為 $5!=120$

由乘法原理，這種五位數共有

$C_3^5\times C_2^4\times5!=10\times6\times120=7200$（個）

35. ⑴由條件得

$C_{n-2}^n=36\Rightarrow\dfrac{n\times(n-1)}{2\times1}=36$

$\Rightarrow n^2-n-72=0\Rightarrow(n-9)(n+8)=0$

$\Rightarrow n=9$ 或 -8（不合）

因此 $n=9$

⑵由條件得

$\Rightarrow C_2^{n+1}:C_3^n=4:5\Rightarrow4C_3^n=5C_2^{n+1}$

$\Rightarrow4\times\dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3\times2\times1}=5\times\dfrac{(n+1)\times n}{2\times1}$

$\Rightarrow4(n-1)(n-2)=15(n+1)(n\neq0)$

$\Rightarrow4n^2-27n-7=0$

$\Rightarrow(4n+1)(n-7)=0$

$\Rightarrow n=7，-\dfrac{1}{4}$（不合）

因此 $n=7$

2-3 實力測驗 P.57 ～ 59

1.(B)	2.(B)	3.(A)	4.(D)	5.(B)
6.(B)	7.(D)	8.(C)	9.(B)	10.(B)
11.(B)	12.(D)	13.(C)	14.(A)	15.(C)
16.(D)	17.(A)	18.(A)	19.(C)	20.(B)

1. 九個數字中偶數有 4 個，奇數有 5 個，二數中至少有一偶數時，其積就為偶數，故其積為偶數的個數有$C_2^9-C_2^5=26$（個）
2. 先從其他兩位同學任選 1 位和小明同一組，剩下的一位同學和小華同一組，故得分組的結果有$C_1^2\times C_1^1=2$（種）

3. $(n+2)(n+1)\times n\times(n-1)$：$2n(2n-1)(2n-2)=3：2$ 整理得

$(n+2)(n+1)：2(2n-1)=3：1$

$\Rightarrow n^2+3n+2=12n-6\Rightarrow n^2-9n+8=0$

$\Rightarrow(n-1)(n-8)=0$

$\Rightarrow n=8$ 或 1（不合）

$\therefore C_2^2+C_2^3+C_2^4+\cdots+C_2^8=C_3^9=\dfrac{9!}{3!6!}=84$

4. ⑴$C_r^{n-1}：C_r^n=10：15$

$\Rightarrow\dfrac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}：\dfrac{n!}{r!(n-r)!}=2：3$

$1：\dfrac{n}{n-r}=2：3$，

$2n=3n-3r\Rightarrow n=3r\cdots$①

⑵$C_r^n：C_r^{n+1}=15：21$

$\Rightarrow\dfrac{n!}{r!(n-r)!}：\dfrac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}=5：7$

$1：\dfrac{n+1}{n+1-r}=5：7$，

$5n+5=7n+7-7r$，$2n=7r-2\cdots$②

由①，②得 $r=2$，$n=6$

5. $P_r^n=720\Rightarrow\dfrac{n!}{(n-r)!}=720\cdots$①

$C_r^n=120\Rightarrow\dfrac{n!}{r!(n-r)!}=120\cdots$②

①÷②　$r!=6$，$r=3$，$n=10$　$\therefore n+r=13$

6. 和為偶數$\Rightarrow\begin{cases}\text{一奇數＋一奇數：}C_2^5=10\\ \text{一偶數＋一偶數：}C_2^4=6\end{cases}$

$\therefore 10+6=16$（種）

7. $C_2^4\times C_2^5=6\times10=60$

8. 5 條不平行的線任取 2 條與 3 條平行線任取一條可構成△

$C_2^5\times C_1^3=10\times3=30$

5 條不平行的線任取 3 條也可構成△

$C_3^5=10$　$\therefore 30+10=40$（個）

9. 因為選作的方法與次序無關，所以選作方法的總數等於 6 題中取 4 題的組合數，即

$C_4^6=\dfrac{6!}{2!4!}=15$ 種

10. (i)$m=2m+1$，$m=-1$（不合）

(ii)$m+2m+1=10$，$m=3$（合）

$\therefore P_m^6=P_3^6=6\times5\times4=120$

11. 利用巴斯卡原理：

$C_m^n=C_{m-1}^{n-1}+C_m^{n-1}\ (1\le m\le n-1)$

$C_0^4+C_1^5+C_2^6+C_3^7+\cdots\cdots+C_{11}^{15}$

$=C_0^5+C_1^5+C_2^6+C_3^7+\cdots+C_{11}^{15}$

$=C_1^6+C_2^6+C_3^7+\cdots\cdots+C_{11}^{15}=C_{11}^{16}=C_5^{16}$

$=\dfrac{16\times15\times14\times13\times12}{5\times4\times3\times2\times1}=4368$

12. $C_3^8=\dfrac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$

13. $C_2^3\times C_3^7+C_3^3\times C_2^7=3\times35+1\times21=126$（種）

14. $\because C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}=1024$

$\therefore a=1024-1=1023$

$b=\dfrac{2^9}{2}=2^8=256\Rightarrow a+b=1023+256=1279$

15. ∵不考慮球員上場位置

∴為組合問題

則全部選法共有$C_{11}^{13}=C_2^{13}=\dfrac{13\times12}{2\times1}=78$ 種

16. ①圓與圓：$C_2^3\times2=6$

②圓與直線：$C_1^3\times C_1^5\times2=30$

③直線與直線：$C_2^5\times1=10$

∴平面上 3 個圓，5 條直線

至多可形成 $6+30+10=46$ 個交點

17. 即從 6 對中先選 3 對，被選中的每對又可從夫或妻中選一人，故有

$C_3^6\times C_1^2\times C_1^2\times C_1^2=\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\times2\times2\times2=160$ 種

18. $C_4^7=C_3^7=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$ 種

19. $C_3^9=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

20. $C_1^5C_1^6=30$

對應課本各章頁碼

2-4 二項式定理

重點一 二項式定理

範例 1- 老師導引 P.61

(1) 有 $H_{10}^{2}=C_{10}^{11}=11$ 項

(2) 一般項 $C_k^{10}x^{10-k}y^k$ 是第 $k+1$ 項

(3) 第 4 項係數為 $C_3^{10}=120$

(4) 代 $x=y=1\Rightarrow C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots+C_{10}^{10}$
$=2^{10}=1024$

(5) $C_0^{10}+C_2^{10}+C_4^{10}+C_6^{10}+C_8^{10}+C_{10}^{10}=2^9=512$

(6) $C_1^{10}+C_3^{10}+C_5^{10}+C_7^{10}+C_9^{10}=2^9=512$

範例 1- 學生演練 P.61

(1) 有 $H_{10}^{2}=C_{10}^{11}=11$ 項

(2) 一般項為 $C_k^{10}x^{10-k}(-y)^k=C_k^{10}(-1)^kx^{10-k}y^k$

(3) 第 4 項係數為 $C_3^{10}(-1)^3=-120$

(4) 代 $x=y=1\Rightarrow C_0^{10}-C_1^{10}+C_2^{10}-\cdots+C_{10}^{10}$
$=(1-1)^{10}=0$

(5) $C_0^{10}+C_2^{10}+C_4^{10}+C_6^{10}+C_8^{10}+C_{10}^{10}=2^9=512$

(6) $-(C_1^{10}+C_3^{10}+C_5^{10}+C_7^{10}+C_9^{10})=-2^9$
$=-512$

範例 2- 老師導引 P.62

第 7 項與第 15 項之係數相等

$\Rightarrow C_6^n=C_{14}^n\Rightarrow n=20$

範例 2- 學生演練 P.62

第 $k+1$ 項的係數為 C_k^8，又 $C_k^8=C_{8-k}^8$，

所以第 4 項係數 $C_3^8=C_5^8=$ 第 6 項係數

範例 3- 老師導引 P.62

$11^{40}=(1+10)^{40}$

$=1+C_1^{40}\cdot10^1+C_2^{40}\cdot10^2+C_3^{40}\cdot10^3+\cdots$

$=1+400+78000+9880000+\cdots$

$\therefore$ 十位數字為 0，百位數為 4

$\therefore(a，b)=(0，4)$

範例 3- 學生演練 P.62

$(1.01)^{10}=(1+0.01)^{10}$

$=C_0^{10}+C_1^{10}(0.01)+C_2^{10}(0.01)^2+C_3^{10}(0.01)^3+$
$\cdots+C_{10}^{10}(0.01)^{10}$

$=1+10(0.01)+45(0.001)+120(0.000001)+$
$\cdots=1.1046...$

所以 $(1.01)^{10}$ 的展開式中，小數點以下第三位數字為 4

重點二 二項式定理的應用

範例 1- 老師導引 P.63

$(x+2y)^5=\sum_{r=0}^{5}C_k^5x^{5-k}(2y)^k$

$C_0^5x^5+C_1^5x^4(2y)+C_2^5x^3(2y)^2+C_3^5x^2(2y)^3$
$+C_4^5x(2y)^4+C_5^5(2y)^5$

$=x^5+10x^4y+40x^3y^2+80xy^3+32y^5$

範例 1- 學生演練 P.63

$(3x-2y)^4=\sum_{r=0}^{4}C_k^4(3x)^{4-k}(-2y)^k$

$C_0^4(3x)^4+C_1^4(3x)^3(-2y)+C_2^4(3x)^2(-2y)^2$

$+C_3^4(3x)(-2y)^3+C_4^4(-2y)^4$

$=81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96xy^3+16y^4$

範例 2- 老師導引 P.63

(1) 共有 $H_6^2=C_6^7=7$ 項

(2) 第 $k+1$ 項為 $C_k^6(2x)^{6-k}y^k=C_k^6 2^{6-k}x^{6-k}y^k$，
當 $k=3$ 時第 4 項的係數為
$C_3^6\times2^3=20\times8=160$

(3) 當 $k=2$ 時，x^4y^2 項的係數為 $C_2^6\times2^4=240$

範例 2- 學生演練 P.63

(1) 共有 $H_8^2=C_8^9=9$ 項

(2) 第 $k+1$ 項為 $C_k^8x^{6-k}(-3y)^k$
$=C_k^8(-3)^kx^{8-k}y^k$，當 $k=2$ 時第 3 項的係數為 $C_2^8\times(-3)^2=28\times9=252$

(3) 當 $k=3$ 時，x^5y^3 項的係數為
$C_3^8\times(-3)^3=-1512$

範例 3- 老師導引 P.64

$(5x^2-\frac{3}{x})^7$ 的展開式一般項為

$C_k^7(5x^2)^{7-k}(-\frac{3}{x})^k=C_k^7 5^{7-k}(-3)^k(x^2)^{7-k}(x^{-1})^k$

$=C_k^7 5^{7-k}(-3)^kx^{14-3k}$，

當 $14-3k=0\Rightarrow k=\frac{14}{3}$，不合，故展開式中無常數項 $\Rightarrow$ 常數項為 0；

又當 $14-3k=2\Rightarrow k=4$ 時，x^2 的係數為

$C_4^7 5^3(-3)^4=354375$

答案與解析

對應課本各章頁碼

範例 3- 學生演練 P.64

$(3x+\frac{2}{x})^5$ 的展開式一般項為 $C_k^5(3x)^{5-k}(\frac{2}{x})^k$

$=C_k^5 3^{5-k}2^k x^{5-2k}$，當 $5-2k=2\Rightarrow k=\frac{3}{2}$，不合，

因此 $(3x+\frac{2}{x})^5$ 展開式中 x^2 的係數為 0

範例 4- 老師導引 P.64

展開式中的一般項為 $C_k^4(ax^3)^{4-k}(\frac{2}{x^2})^k$

$=C_k^4 a^{4-k}2^k x^{12-5k}$，

當 $12-5k=2\Rightarrow k=2$ 時，x^2 之係數為 6

$\Rightarrow C_2^4\times a^2\times 2^2=6\Rightarrow a^2=\frac{1}{4}\Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$

範例 4- 學生演練 P.64

$\because f(x)=(ax^2-\frac{2}{x})^5$ 之所有項係數和為 1

$\therefore f(1)=1=(a-2)^5\Rightarrow a=3$，

又 x^4 項係數 $=C_3^5 a^3(-2)^2=C_3^5 3^3(-2)^2=1080$

範例 5- 老師導引 P.65

原式 $=\frac{(1+x)[(1+x)^{10}-1]}{(1+x)-1}=\frac{(1+x)^{11}-(1+x)}{x}$，

取分子 x^3 項係數 $=(1+x)^{11}$ 的 x^3 項係數

$=C_3^{11}=165$

範例 5- 學生演練 P.65

$(1+x^2)1+(1+x^2)^2+\cdots+(1+x^2)^{20}$

$=\frac{(1+x^2)[(1+x^2)^{20}-1]}{(1+x^2)-1}=\frac{(x^2+1)^{21}-(1+x^2)}{x^2}$

$\therefore x^6$ 之係數 $C_4^{21}=5985$

2-4 學習成效驗收 P.66

1. x^4y^4 係數為 $C_4^6\times 2^4\times(-1)^2=15\times 16\times 1=240$
2. $1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5$
3. 一般項 $C_r^{10}x^{10-r}(-3y)^r$，取 $r=4$

   $\therefore x^6y^4$ 項係數 $=C_4^{10}(-3)^4=17010$
4. $[x+(y+z)^2]^8=C_0^8x^8+\cdots\cdots+C_3^8x^5[(y+z)^2]^3+\cdots\cdots$

   又 $(y+z)^6=C_0^6y^6+\cdots\cdots+C_2^6y^4z^2+\cdots\cdots$

   $\therefore x^5y^4z^2$ 項的係數 $=C_3^8\times C_2^6=56\times 15=840$
5. $(2x-x^{-2})^8$ 的 x^2 項係數為 $C_6^8\times 2^6\times(-1)^2=1792$
6. 所求 x^2 項的係數，相當於 $(1+2x)^5$ 中 x^3 項的係數，即 $C_3^5\times 2^3=10\times 8=80$
7. 由二項式定理知：

   $(1+\frac{1}{5})^n$

   $=C_0^n\times 1^n\times(\frac{1}{5})^0+C_1^n\times 1^{n-1}\times(\frac{1}{5})^1+C_2^n\times 1^{n-2}\times(\frac{1}{5})^2+\cdots\cdots+C_n^n\times 1^0\times(\frac{1}{5})^n$

   $=C_0^n+\frac{C_1^n}{5}+\frac{C_2^n}{5^2}+\cdots\cdots+\frac{C_n^n}{5^n}$

   $\therefore$ 原式 $=(\frac{6}{5})^n$
8. $(x+y)^{10}$ 展開式中，第 $2r+1$ 項與第 $r+3$ 項之係數相等

   $\Rightarrow C_{2r}^{10}+C_{r+2}^{10}\Rightarrow 2r=r+2$ 或 $2r+(r+2)=10$

   $\Rightarrow r=2$ 或 $r=\frac{8}{3}$

   但已知 r 為整數，則可得 $r=2$

   故此項係數為 $C_{2\times 2}^{10}=C_{2+2}^{10}=C_4^{10}=210$
9. $C_2^2(x^2)^2+C_2^3(x^2)^2+C_2^4(x^2)^2+\cdots\cdots+C_2^{10}(x^2)^2$

   係數 $=C_2^2+C_2^3+C_2^4+\cdots\cdots+C_2^{10}=C_3^{11}=165$

   【另解】

   係數 $=C_2^2+C_2^3+C_2^4+\cdots\cdots+C_2^{10}=C_3^{11}=165$
10. $(x-\frac{2}{x^3})^{10}$ 展開式的一般項為 $C_r^{10}x^{10-r}(-\frac{2}{x^3})^r$

    $=C_r^{10}(-2)^r x^{10-4r}$

    則 $10-4r=6\Rightarrow r=1$

    故 x^6 項的係數為 $C_1^{10}(-2)^1=-20$
11. $\because C_1^n+C_3^n+C_5^n+\cdots+C_n^n=2^{n-1}$

    $\therefore 1000<2^{n-1}<2000$

    又 $2^{10}=1024$，$2^{11}=2048$

    $\Rightarrow n-1=10\Rightarrow n=11$
12. $\because (x+y)^7=C_0^7x^7+C_1^7x^6y^1+C_2^7x^5y^2+\cdots+C_7^7y^7$

    $x=1$，$y=-1$ 代入

    $\Rightarrow(1-1)^7=C_0^7-C_1^7+C_2^7-\cdots-C_7^7$

    $\therefore C_0^7-C_1^7+C_2^7-\cdots+C_6^7-C_7^7=0$
13. 在 $(x+y)^n$ 展開式中，第 r 項係數為 C_{r-1}^n

    由題意知 $C_{7-1}^n=C_{15-1}^n$，即 $C_6^n=C_{14}^n$

    $\Rightarrow 6=14$（不合）或 $n=6+14$

    $\therefore n=20$

對應課本各章頁碼

14. 【方法一】

$(\sqrt{x}+\frac{1}{x})^{14}$展開式的一般項為

$C_r^{14}(\sqrt{x})^r\times(\frac{1}{x})^{14-r}=C_r^{14}x^{\frac{3}{2}r-14}$

當$\frac{3}{2}r-14=4\Rightarrow r=12$

$\therefore$所求係數$=C_{12}^{14}=C_2^{14}=91$

【方法二】

由$\frac{14!}{12!2!}\times(\sqrt{x})^{12}\times(\frac{1}{x})^2=\frac{14\times13}{2\times1}\times x^6\times x^{-2}$

$=91x^4$

$\therefore$所求係數為 91

2-4 實力測驗 P.67 ～ 69

1.(A)	2.(D)	3.(B)	4.(A)	5.(A)
6.(D)	7.(D)	8.(C)	9.(A)	10.(C)
11.(C)	12.(C)	13.(A)	14.(C)	15.(B)
16.(D)	17.(C)	18.(B)	19.(C)	20.(A)
21.(B)	22.(D)	23.(A)		

1. 當 $k+1=14\Rightarrow k=13$ 時，第 14 項的係數為 $C_{13}^{15}2^2(-1)^{13}=-420$
2. 第 $k+1$ 項的係數為C_k^n，所以$C_2^n=C_7^n$ $\Rightarrow n=2+7=9$
3. 一般項為$C_k^6(2)^{6-k}(-3)^kx^{12-2k}y^k$，所以當 $k=2$ 時，x^8y^2 項之係數為$C_2^6 2^4(-3)^2=2160$
4. 一般項為$C_k^{16}(x^{-1})^{16-k}(x^3)^k=C_k^{16}x^{4k-16}$，所以當 $4k-16=16\Rightarrow k=8$ 時，x^{16} 項之係數為 $C_8^{16}=12870$
5. 一般項為$C_k^{12}x^{12-k}(-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}})^k=C_k^{12}(-\frac{1}{3})^kx^{12-\frac{3}{2}k}$，所以當 $12-\frac{3}{2}k=0\Rightarrow k=8$ 時，常數項為 $C_8^{12}(-\frac{1}{3})^8=\frac{55}{729}$
6. 一般項為$C_k^4a^{4-k}2^kx^{12-5k}$，所以當 $12-5k=2$ $\Rightarrow k=2$ 時，x^2 的係數為$C_2^4a^22^2=6\Rightarrow a^2=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$
7. 一般項為$C_k^{10}x^{10-k}(-1)^k$，所以當 $10-k=8$ $\Rightarrow k=2$ 時，x^8 項之係數$C_k^{10}(-1)^2=45$
8. 第 $k+1$ 項為$C_k^nx^k$，所以$C_{15}^n=C_{25}^n\Rightarrow n=15+25$ $=40$
9. 一般項為$C_k^{10}x^k$，所以當 $k=6$ 時，x^6 項的係數為$C_6^{10}=210$
10. 一般項為$C_k^5 2^{5-k}(-3)^kx^{5-k}y^k$，所以當 $k=3$ 時，x^2y^3 項的係數為$C_3^5 2^2(-3)^3=-1080$
11. 一般項為$C_k^8 2^kx^{8-k}y^k$，所以當 $k=3$ 時，x^5y^3 項的係數為$C_3^8 2^3=448$
12. 一般項為$C_k^{12}2^kx^{20-5k}$，所以當 $20-5k=10$ $\Rightarrow k=2$ 時，x^{10} 的係數為$C_2^{10}2^2=180$
13. 一般項為$C_k^8 2^{8-k}(-1)^kx^{8-3k}$，所以當 $8-3k=2$ $\Rightarrow k=2$ 時，x^2 的係數為$C_2^8 2^6(-1)^2=1792$
14. 一般項為 $C_k^{12}(-1)^k13^{12-4k}x^{12-3k}$，所以當 $12-3k=3\Rightarrow k=3$ 時，x^3 項之係數為 $C_3^{12}(-1)^33^0=-220$
15. 一般項為$C_k^{15}x^{\frac{15}{2}-\frac{3}{2}k}$，所以當$\frac{15}{2}-\frac{3}{2}k=3$ $\Rightarrow k=3$ 時，x^3 項之係數為C_3^{15}
16. 一般項為$C_k^5(-2)^kx^{\frac{5}{3}-\frac{k}{3}-\frac{k}{2}}=C_k^5(-2)^kx^{\frac{5}{3}-\frac{5}{6}k}$，所以當$\frac{5}{3}-\frac{5}{6}k=0\Rightarrow k=2$ 時，常數項為 $C_2^5(-2)^2=40$
17. 一般項為$C_k^6a^{6-k}x^{6-3k}$，所以當 $6-3k=0\Rightarrow k=2$ 時，常數項為$C_2^6a^4=240\Rightarrow a^4=16\Rightarrow a=\pm2$，又 $a>0$ $\therefore a=2$
18. $\because 11^{10}=(1+10)^{10}=C_0^{10}+C_1^{10}\cdot10+C_2^{10}\cdot10^2+\cdots+C_{10}^{10}\cdot10^{10}$
$\therefore 11^{10}$ 除以 1000 的餘數為 $(C_0^{10}+C_1^{10}\cdot10+C_2^{10}\cdot10^2)$ 除以 1000 的餘數$=4601$ 除以 1000 的餘數$=601$
19. $\because C_1^n+C_2^n+\cdots C_n^n=2^n-1$
$\therefore 1000<2^n-1<2000$
$\Rightarrow n=10$
20. $(0.98)^{12}=(1-0.02)^{12}$
$=C_0^{12}+C_1^{12}(-0.02)+C_2^{12}(-0.02)^2+\cdots$
$=1-0.24+0.0264-0.00176+\cdots\fallingdotseq0.7846$
21. 一般項為$C_k^{10}(-2)^kx^{20-\frac{5}{2}k}$，所以當 $20-\frac{5}{2}k=0$ $\Rightarrow k=8$，常數項係數為$C_8^{10}(-2)^8=11520$
22. $\because(ax^2-\frac{2}{x})^5$ 之所有項係數和為 $1\Rightarrow(a-2)^5=1$
$a=3$，
$\therefore x^4$ 項係數$=C_3^5\cdot a^3\cdot(-2)^2=10\times27\times4=1080$

對應課本各章頁碼

23. $\because (1+x^2)+(1+x^2)^2+(1+x^2)^3+\cdots+(1+x^2)^{20}$

$=\dfrac{(1+x^2)[(1+x^2)^{20}-1]}{(1+x^2)-1}=\dfrac{(1+x^2)^{21}-(1+x^2)}{x^2}$

又 $(1+x^2)^{21}$ 的展開式中，一般項為$C_k^{21}(x^2)^k$

$=C_k^{21}\cdot x^{2k}$

$\therefore$當 $2k=6\Rightarrow k=3$ 時，x^4 之係數為

$C_3^{21}=\dfrac{21\cdot 20\cdot 19}{3\cdot 2\cdot 1}=1330$

對應課本各章頁碼

Chapter 2 歷屆試題

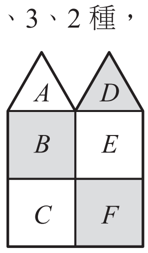
P.70 ～ 75

1.(C)	2.(B)	3.(D)	4.(C)	5.(C)
6.(C)	7.(C)	8.(B)	9.(C)	10.(C)
11.(C)	12.(B)	13.(A)	14.(A)	15.(C)
16.(B)	17.(B)	18.(D)	19.(B)	20.(A)
21.(A)	22.(B)	23.(C)	24.(C)	25.(A)
26.(D)	27.(B)	28.(A)	29.(D)	30.(D)
31.(C)	32.(C)	33.(C)	34.(C)	35.(C)
36.(D)	37.(C)	38.(B)	39.(B)	40.(B)
41.(C)	42.(A)	43.(B)	44.(D)	45.(D)
46.(A)				

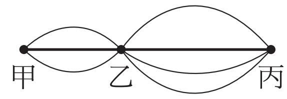
1. 女生之間不排男生，也就是女生必須要全部相鄰，故可視 3 個女生為 1 單位，與 4 個男生構成 5 個單位的全取直線排列，其排列數為 $P_5^5=5!=120$，
又每種排法中，3 個女生相鄰的排列數為 $P_3^3=3!=6$
由乘法原理知，所求排法共有 120×6=720 種
2. 首位數字不得為 0

$$\square\underbrace{\square\square\square\square}_{P_4^4}$$

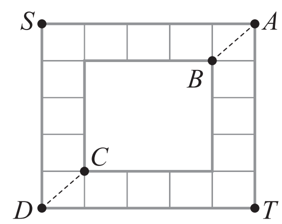
P_4^4（剩餘 4 個數字排末 4 位）
（先由 1，2，3，4 選一個數字排首位）
∴共可組成 $4\times P_4^4=4\times4!=96$ 個數字不重複的五位數
3. 每對夫妻必須相鄰，故視為一個單位，6 個夫妻視為 6 個單位，其排列數為 6!，又每對夫婦互換位置，方法有 2 種，6 對夫婦共有 2^6 種
∴所求不同的排列法共有 $2^6\times6!$ 種
4. $\dfrac{6!}{2!}=360$
5. 每一格子僅塗同一顏色，且顏色不重複使用，依序塗 A、B、C、D、E、F 共 6 個格子，其顏色選擇分別有 7、6、5、4、3、2 種，由乘法原理知：
共可塗出不同的著色樣式有
$7\times6\times5\times4\times3\times2=P_6^7$ 種



6.



由乘法原理知：
自甲地經過乙地到丙地，共有 $3\times4=12$ 種走法
7. 在「下雨天留客天天留我不留」，11 個字中，有「3 個天」，「3 個留」，其餘的字各 1 個，由相同物的排列公式知：
共有$\dfrac{11!}{3!3!}$種不同排法
8.



先找出必經過的點，分類之後再利用相同物排列解出每類的走法，最後再利用加法原理加總

$S\to A\to T$：$\dfrac{5!}{5!}\times\dfrac{5!}{5!}=1$

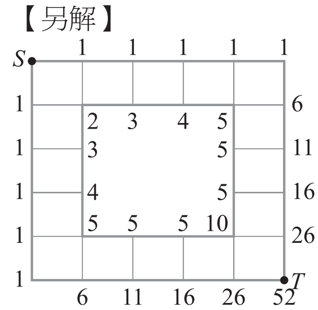
$S\to B\to T$：$\dfrac{5!}{4!\times1!}\times\dfrac{5!}{4!\times1!}=25$

$S\to C\to T$：$\dfrac{5!}{4!\times1!}\times\dfrac{5!}{4!\times1!}=25$

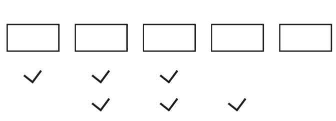
$S\to D\to T$：$\dfrac{5!}{5!}\times\dfrac{5!}{5!}=1$

由加法原理知：所有走法共有 $1+25+25+1=52$ 種

【另解】



∴甲君從點 S 走到點 T 共有 52 種不同的走法
9.



從 5 個座位中，選出 3 個相連的座位之選法有 3 種，又甲、乙、丙入座方法有 3!，丁、戊入座方法有 2!
∴由乘法原理知，共有 $3\times3!\times2!=36$（種）

對應課本各章頁碼

10. $\underset{\sim}{3!} \times \underset{\sim}{2!}=12$

中文書視為 1 個物品　　2 本中文書互換

故只有 2 本書 +1 個物品，共 3 個物品排列

11. 有四種不同漢堡，甲先選有 4 種選擇，乙後選有 3 個選擇

∴由乘法原理知：

甲、乙兩人購買不同漢堡的情形有

$4\times3=12$（種）

12. 設小明、小華與 A、B 兩位同學打掃，則分組結果為

⑴ (小明, A) 即 (小華, B)

⑵ (小明, B) 即 (小華, A)，

共 2 種分組結果

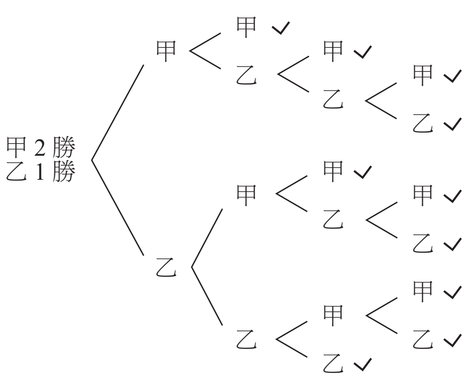
13.

		1,3 7,9

$4\times4\times4=64$

14. 因為 mhchcm 中有 2 個 m，2 個 h，2 個 c，共 6 個字母，所以其排列數為 $\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$

15.



共 10 種

16. 由 P_m^n 的意義，將 $P_3^{2n}=20\times P_2^n$ 化為

$(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)=20\times n\times(n-1)$

$\Rightarrow 2n-1=5\Rightarrow n=3$

17. $a=2^5\cdot3^7\cdot5^{11}=2^3\cdot(2^2\cdot3^7\cdot5^{11})$

∴ a 的正因數中，有 $(2+1)(7+1)(11+1)$

$=288$ 個 8 的倍數

18. 至甲國三個城市表演有 $3!=6$ 種方式

至乙國四個城市表演有 $4!=24$ 種方式

由乘法原理知：共有 $6\times24=144$ 種巡迴路線的規劃

故選 (D)

19. $\{1,3,5,7,9\}$ 選三個相異數字排成三位數

五個數字選三個做直線排列

$\Rightarrow P_3^5=5\times4\times3=60$（個）　故選 (B)

20. 高□□高□□高□□高□□高

第一步：高麗菜先排有 $\dfrac{5!}{5!}=1$ 種

第二步：再將萵苣與菠菜任意排入 8 個空格有 $\dfrac{8!}{4!4!}$ 種

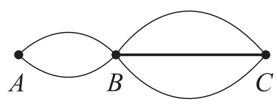
由乘法原理知：共有 $1\times\dfrac{8!}{4!4!}=\dfrac{8!}{4!4!}$

故選 (A)

21. 顏色不重複，但要排列於

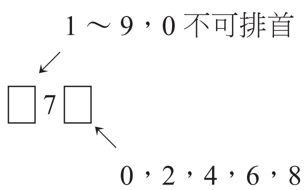
A、B、C、D、$E\rightarrow P_5^8$　　選 (A)

22.



2　×　3　$=6$　　選 (B)

23.



∴共有 $9\times1\times5=45$ 個

24. 計程車為「可重複者」

旅客為「不可重複者」

安全載客方式＝任意載－(5 人同搭一輛超載)

$=3^5-3=240$

∴載客方式共有 240 種

25. 甲、乙、丙 3 人，每人均有 4 種選擇，由乘法原理知：

共有 $4\times4\times4=4^3=64$（種）

【另解】

所有可能的結果如下：

⑴ 3 同 $\Rightarrow C_1^4=4$（種）

⑵ 3 異 $\Rightarrow C_3^4\times3!=24$（種）

⑶ 2 同 1 異 $\Rightarrow C_2^4\times C_1^2\times\dfrac{3!}{2!1!}=36$（種）

∴共有 $4+24+36=64$（種）

26. 甲、乙、丙三人，每人皆有 3 種套餐可選擇，故方法為 $3\times3\times3=3^3=27$

27. 所求選法共有 $C_2^4\times C_6^8=C_2^4\times C_2^8=\dfrac{4\times3}{2\times1}\dfrac{8\times7}{2\times1}$

$=168$（種）

28. 凸九邊形的 9 個頂點（任 3 點均不共線），共可決定$C_2^9=\dfrac{9\times8}{2}=36$ 條線段，又其中 9 條為凸九邊形的邊
∴對角線共有 $36-9=27$ 條
《註》凸 n 邊形的對角線共有
$C_2^n-n=\dfrac{n(n-3)}{2}$條

29. 利用組合公式：
不同選法共有$C_6^{10}=C_4^{10}=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}$
$=210$（種）

30. $\because P_5^{n+2}=120\,C_4^{n+2}$
$\Rightarrow\dfrac{(n+2)!}{(n+2-5)!}=120\times\dfrac{(n+2)!}{4!\,(n+2-4)!}$
$\Rightarrow\dfrac{1}{(n-3)!}=5\times\dfrac{1}{(n-2)!}$
$\Rightarrow\dfrac{1}{(n-3)!}=\dfrac{5}{(n-2)\times(n-3)!}$
$\Rightarrow n-2=5$
$\therefore n=7$

31. ∵任意兩隊都互相比賽一場次
∴ 6 隊參加比賽，共比賽$C_2^6=\dfrac{6!}{2!4!}=15$ 場次

32. $\because C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}$
$\Rightarrow C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots\cdots+C_{10}^{10}=2^{10}-C_0^{10}$
$=1024-1=1023$

33. $C_2^4\times C_2^2=\dfrac{4\times3}{2\times1}\times\dfrac{2\times1}{2\times2}=6$（種）（或$\dfrac{4!}{2!2!}=6$）

34. $C_2^{12}=\dfrac{12\times11}{2\times1}=66$

35. $C_2^{29}-29=406-29=377$（條）

36. 每一時段皆選2人，且此2人不須排列（組合）
∴所求$=C_2^6\times C_2^4\times C_2^2=\dfrac{6\times5}{2!}\times\dfrac{4\times3}{2!}\times\dfrac{2\times1}{2!}$
$=15\times6\times1=90$（種）

37. 主菜：雞腿、排骨、魚排，3 選 1 之方法數為$C_1^3=3$
配菜 8 種選 3 種之方法數為$C_3^8=\dfrac{8\times7\times6}{3!}=56$
由乘法原理知：
便當組合共有 $3\times56=168$（種）

38. 有一、二、三、四，共 4 個時段，第一時段從 5 人中選 2 人
$\Rightarrow C_2^5=\dfrac{5\times4}{2!}=10$
第二時段從剩下 3 人中（第一時段選中 2 人不可連續）選 2 人$\Rightarrow C_2^3=3$
同第二時段之選取方式⇒第三時段及第四時段皆為 3 種
故全部有 $10\times3\times3\times3=270$ 種排班方式

$\boxed{一}\quad\boxed{二}\quad\boxed{三}\quad\boxed{四}$

$\uparrow\quad\uparrow\quad\uparrow\quad\uparrow$

$C_2^5\times C_2^3\times C_2^3\times C_2^3=270$

第三時段剩的 1 人再加第二時段 2 人，共 3 人

第二時段剩的 1 人再加第一時段 2 人，共 3 人

39. 所求方法共有：
$C_2^2\quad\times\quad C_3^5\quad=10$（種）
$\uparrow\qquad\qquad\uparrow$
（2 種必選）×（剩下 5 種選 3 種）
故選 (B)

40. $C_1^5\times C_2^4=5\times6=30$　選 (B)

41. 設 $(x^3+\dfrac{1}{x})^{30}$ 展開式中 x^{82} 項為
$C_r^{30}\,(x^3)^{30-r}\,(\dfrac{1}{x})^r=C_r^{30}\,x^{90-4r}\Rightarrow90-4r=82$
$\Rightarrow r=2$
$\therefore x^{82}$ 項的係數為$C_2^{30}=\dfrac{30\times29}{2\times1}=435$

42. 設 $(2x-y^2)^6$ 展開式中的一般項為
$C_r^6\,(2x)^{6-r}\,(-y^2)^r=C_r^6\times2^{6-r}\times(-1)^r\times x^{6-r}y^{2r}$
令 $6-r=4$ 且 $2r=4\Rightarrow r=2$
$\therefore x^4y^4$ 項的係數為$C_2^6\times2^4\times(-1)^2=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times16$
$=240$

43. $\because (x+y)^{10}=\sum\limits_{k=0}^{10}C_k^{10}\,x^ky^{10-k}$
以 $x=1$，$y=1$ 代入得
$2^{10}=\sum\limits_{k=0}^{10}C_k^{10}\,1^k1^{10-k}=\sum\limits_{k=0}^{10}C_k^{10}$
$=C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots\cdots+C_{10}^{10}$
$\therefore C_0^{10}+C_1^{10}+C_2^{10}+\cdots\cdots+C_{10}^{10}=1024$

對應課本各章頁碼

44. 將 $(x^2+\frac{1}{x^2})^6$ 展開後第 $r+1$ 項為

$C_r^6(x^2)^{6-r}(\frac{1}{x^2})^r=C_r^6x^{12-2r}x^{-2r}=C_r^6x^{12-4r}$

令 $12-4r=0\Rightarrow r=3$

$\therefore$ 常數項為 $C_3^6=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

45. $(2x+y)^6$ 展開式中第 $r+1$ 項為 $C_r^6(2x)^{6-r}y^r$

$=C_r^6\times2^{6-r}\times x^{6-r}\times y^r$

令 $6-r=2\Rightarrow r=4$

$\therefore$ x^2y^4 項之係數為 $C_4^6\times2^{6-4}=\frac{6\times5}{2\times1}\times2^2=60$

46. $(\frac{2}{3x}+\frac{3}{4y^2})^8=(\frac{2}{3}x^{-1}+\frac{3}{4}y^{-2})^8$

由二項式定理知：$x^{-2}y^{-12}$ 項為

$C_6^8(\frac{2}{3}x^{-1})^2(\frac{3}{4}y^{-2})^6=28\times(\frac{2}{3})^2\times(\frac{3}{4})^6\times x^{-2}y^{-12}$

$=2^{-8}\times3^4\times7^1\times x^{-2}y^{-12}$

即 $a=-8$，$b=4$，$c=0$，$d=1$

得 $a-b-c+d=-8-4-0+1=-11$

答案與解析

對應課本各章頁碼

Chapter 3　機率與統計

3-1　集合的基本概念

重點一　集合的意義及表示法

範例 1- 老師導引　P.80

(1) 列舉法：$\{1,2,4,5,10,20\}$

(2) 描述法：$\{x|x=4k+1$，$0\le k\le 49$，k 為整數$\}$

範例 1- 學生演練　P.80

(1) 列舉法：$\{1,2,3,6,9,18\}$

(2) 描述法：$\{x|x=3k+1$，$0\le k\le 32$，k 為整數$\}$

範例 2- 老師導引　P.81

不含任何元素的子集：$\varnothing$

恰含有一個元素的子集：$\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$

恰含有二個元素的子集：$\{1,2\}$、$\{1,3\}$、$\{2,3\}$

恰含有三個元素的子集：$\{1,2,3\}$

所以 A 的所有子集為 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$

範例 2- 學生演練　P.81

$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，$\{3,4\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,3,4\}$，$\{2,3,4\}$，$\{1,2,3,4\}$，共有 $2^4=16$ 個

範例 3- 老師導引　P.81

(1) $A\cap B=\{3,5\}$

(2) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,9\}$

(3) $(A\cup B)\cap C$
$=\{1,2,3,4,5,6,7,9\}\cap\{2,4,6,8,10\}$
$=\{2,4,6\}$

(4) $A-B=A-(A\cap B)=\{2,4,6\}$

範例 3- 學生演練　P.81

(1) $A\cap B=\{2,3\}$

(2) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8,9\}$

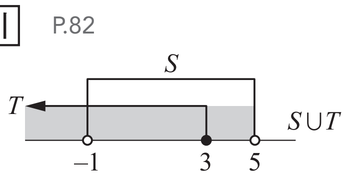
(3) $(A\cup B)\cap C=\{2,4\}$

(4) $B-A=\{4,6,9\}$

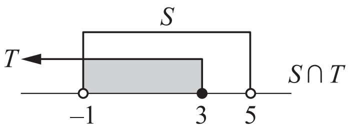
範例 4- 老師導引　P.82

由圖示知：

$S\cup T=\{x|x<5\}$

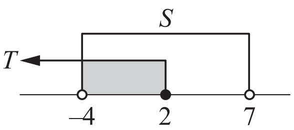


$S\cap T=\{x|-1<x\le 3\}$



範例 4- 學生演練　P.82

由圖示知：



$S\cup T=\{x|x<7$，x 為實數$\}$

$S\cap T=\{x|-4<x\le 2$，x 為實數$\}$

範例 5- 老師導引　P.82

$\because A\cap B=\{4,8\}$

$\therefore 2x-6=4$ 且 $3y-1=8\Rightarrow x=5$，$y=3$

範例 5- 學生演練　P.82

$\because S\cap T=\{5,6\}$

$\therefore 3a-1=5$ 且 $2b+2=6\Rightarrow a=2$，$b=2$

範例 6- 老師導引　P.83

(1) $C'=U-C=\{1,3,4,7\}$

(2) $(C-A)\cap B=\{5,6,8,9\}\cap\{4,6,7,9\}=\{6,9\}$

(3) $(A\cup B)'=U-(A\cup B)$
$=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
$-\{1,2,3,4,6,7,9\}$
$=\{5,8\}$

範例 6- 學生演練　P.83

(1) $A'=U-A=\{3,6,7,9,10\}$

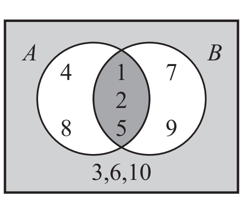
(2) $B'=U-B=\{3,4,6,8,10\}$

(3) $(A\cup B)'=\{3,6,10\}$

(4) $A'\cap B'=\{3,6,10\}$

(5) $(A\cap B)'=\{3,4,6,7,8,9,10\}$

(6) $A'\cup B'=\{3,4,6,7,8,9,10\}$



對應課本各章頁碼

範例 7- 老師導引 P.84

設 A_i 為 i 的倍數所成之集合

(1) $n(A_2\cup A_3)=n(A_2)+n(A_3)-n(A_2\cap A_3)$

$=[\frac{500}{2}]+[\frac{500}{3}]-[\frac{500}{6}]$

$=250+166-83$

$=333$

(2) $n(A_2\cup A_3\cup A_5)$

$=n(A_2)+n(A_3)+n(A_5)-n(A_2\cap A_3)$

$-n(A_2\cap A_5)-n(A_3\cap A_5)+n(A_2\cap A_3\cap A_5)$

$=[\frac{500}{2}]+[\frac{500}{3}]+[\frac{500}{5}]-[\frac{500}{6}]-[\frac{500}{10}]$

$-[\frac{500}{15}]+[\frac{500}{30}]$

$=250+166+100-83-50-33+16$

$=366$

範例 7- 學生演練 P.84

設 A_i 為 i 的倍數所成之集合

(1) $n(A_3\cup A_5)=n(A_3)+n(A_5)-n(A_3\cap A_5)$

$=[\frac{1000}{3}]+[\frac{1000}{5}]-[\frac{1000}{15}]$

$=333+200-66$

$=467$

(2) $n(A_3\cup A_5\cup A_7)$

$=n(A_3)+n(A_5)+n(A_7)-n(A_3\cap A_5)$

$-n(A_3\cap A_7)-n(A_5\cap A_7)+n(A_3\cup A_5\cup A_7)$

$=[\frac{1000}{3}]+[\frac{1000}{5}]+[\frac{1000}{7}]-[\frac{1000}{15}]$

$-[\frac{1000}{21}]-[\frac{1000}{35}]+[\frac{1000}{105}]$

$=333+200+142-66-47-28+9=543$

範例 8- 老師導引 P.85

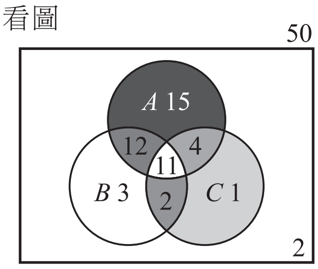
設 A：國文及格，B：英文及格，C：數學及格，則 $n(A\cup B\cup C)$

$=42+28+18-23-13-15+11=48\cdots$

至少有一科及格者

$\therefore$ 三科均不及格者有 $50-48=2$（人）

【另解】看圖



由圖知：$n(A\cup B\cup C)=42+3+2+1=48$

$\therefore$ $n(A'\cup B'\cup C')=50-48=2$（人）

範例 8- 學生演練 P.85

三關均未通過有 8 人

$\Rightarrow$ 所以至少一關通過有 $60-8=52$ 人

則 $n(A\cup B\cup C)=38+32+23-15-13-17$

$+n(A\cap B\cap C)=52$

$\therefore$ $n(A\cap B\cap C)=4$

故三關均通過者有 4 人

重點二　排容原理

範例 1- 老師導引 P.86

設 A 表甲排第一位的排法，B 表乙排第四位的排法，所求為

$n(A'\cap B')=n(A\cup B)'=n(U)-n(A\cup B)$

$=5!-(4!+4!-3!)=78$（種）

範例 1- 學生演練 P.86

$n(A'\cap B'\cap C')=n((A\cup B\cup C)')$

$=n(U)-n(A\cup B\cup C)$

$=n(U)-n(A)-n(B)-n(C)$

$+n(A\cap B)+n(B\cap C)$

$+n(C\cap A)-n(A\cap B\cap C)$

$=7!-3\times 6!+3\times 5!-4!$

$=5040-2160+360-24$

$=3216$

範例 2- 老師導引 P.87

設集合 A 表示喜歡籃球的同學，集合 B 表示喜歡排球的同學，集合 C 表示喜歡棒球的同學；而 $A\cup B\cup C$ 表示喜歡三種球類之一的人，因此 $n(A\cup B\cup C)=50-5=45$

利用排容原理

$n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)$

$-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$\Rightarrow 45=30+28+25-20-16-17$

$+n(A\cap B\cap C)$

$\Rightarrow n(A\cap B\cap C)=15$

$\therefore$ 班上同學對籃球、排球及棒球都喜歡的人數為 15 人

答案與解析

對應課本各章頁碼

範例 2- 學生演練 P.87

$$所求=\left(\left[\frac{500}{2}\right]+\left[\frac{500}{3}\right]-\left[\frac{500}{6}\right]\right)-\left[\frac{500}{14}\right]-\left[\frac{500}{21}\right]+\left[\frac{500}{42}\right]$$
$$=(250+166-83)-35-23+11$$
$$=286$$

重點三　樣本空間與事件

範例 1- 老師導引 P.88

$S=\{(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)\}$

範例 1- 學生演練 P.88

$S=\{1,2,3,4,5,6\}$

範例 2- 老師導引 P.89

$S=\{(正，正，正)，(正，正，反)，(正，反，正)，(正，反，反)，(反，正，正)，(反，正，反)，(反，反，正)，(反，反，反)\}$

範例 2- 學生演練 P.89

$S=$
$\{(1,1)，(1,2)，(1,3)，(1,4)，(1,5)，(1,6)，$
$(2,1)，(2,2)，(2,3)，(2,4)，(2,5)，(2,6)，$
$(3,1)，(3,2)，(3,3)，(3,4)，(3,5)，(3,6)，$
$(4,1)，(4,2)，(4,3)，(4,4)，(4,5)，(4,6)，$
$(5,1)，(5,2)，(5,3)，(5,4)，(5,5)，(5,6)，$
$(6,1)，(6,2)，(6,3)，(6,4)，(6,5)，(6,6)\}$

範例 3- 老師導引 P.89

$S=\{(3,6)，(4,5)，(5,4)，(6,3)，(4,6)，(5,5)，(6,4)，(5,6)，(6,5)，(6,6)\}$

範例 3- 學生演練 P.89

$S=\{(1,1)，(1,2)，(2,1)，(1,3)，(2,2)，(3,1)\}$

範例 4- 老師導引 P.90

(1) $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$
(2) $B\cap C=\{5\}$
(3) $A'=U-A=\{3,4,5,6,7,8\}$
(4) $A\cap B=\{2\}\neq\varnothing$　$\therefore A$，B 不為互斥事件

範例 4- 學生演練 P.90

(1) $A=\{(1,5)，(2,4)，(3,3)，(4,2)，(5,1)\}$
$B=\{(2,6)，(3,5)，(4,4)，(5,3)，(6,2)\}$
$C=\{(2,4)，(4,2)\}$
(2) $A\cap B=\varnothing$
(3) $A\cup C=\{(1,5)，(2,4)，(3,3)，(4,2)，(5,1)\}$
(4) $\because B\cap C=\varnothing$　$\therefore B$ 與 C 為互斥事件

範例 5- 老師導引 P.90

$A=\{2,4,6\}$，$B=\{1,3,5\}$，$C=\{1,2,3\}$
(1) $A\cap C=\{2\}$
(2) $B\cup C=\{1,2,3,5\}$
(3) $C'=U-C=\{4,5,6\}$
(4) $A\cap B=\varnothing$　$\therefore A$ 與 B 為互斥事件

範例 5- 學生演練 P.90

$A=\{1,3,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，$C=\{2,3,5\}$
(1) $A\cap C=\{3,5\}$
(2) $B\cup C=\{2,3,4,5,6\}$
(3) $C'=U-C=\{1,4,6\}$
(4) $A\cap B=\varnothing$　$\therefore A$ 與 B 為互斥事件
(5) $B\cap C=\{2\}$　$\therefore B$ 與 C 不為互斥事件

3-1　學習成效驗收 P.91 ～ 93

1. A 的子集中：
   不含任何元素者：$\varnothing$
   只含一個元素者：$\{a\}$、$\{b\}$、$\{c\}$
   恰含二個元素者：$\{a,b\}$、$\{b,c\}$、$\{a,c\}$
   含三個元素者：$\{a,b,c\}$
   A 共有 8 個子集
2. (1)列舉法：從 1 到 50 的自然數中，被 5 除餘 3 的數所成的集合為 $\{3,8,13,18\}$
   (2)描述法：因為被 5 除餘 3 的自然數可表為 $5k+3$，其中 k 為非負整數；或 $5k-2$，其中 k 為正整數
   由 $1\leq 5k+3\leq 20$，得 $0\leq k\leq 3$
   由 $1\leq 5k-2\leq 20$，得 $1\leq k\leq 4$
   所以上述集合用描述法可寫為
   $\{x|x=5k+3，0\leq k\leq 3\}$
   或 $\{x|x=5k-2，1\leq k\leq 4\}$

3. $A=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$

$B=\{3,6,9,12,15,18\}$

(1) $A\cap B=\{6,12,18\}$

$A\cup B=\{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18\}$

(2) $A-B=\{2,4,8,10,14,16\}$

$B-A=\{3,9,15\}$

4. 「點數和大於 8」這件事可區分為下面 4 個類別，而各類別的方法分別如下：

(1)點數和是 9：$(6,3)$、$(5,4)$、$(4,5)$、$(3,6)$ 共 4 種

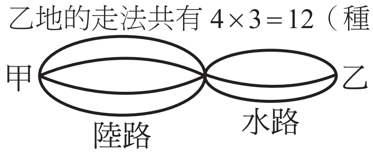
(2)點數和是 10：$(6,4)$、$(5,5)$、$(4,6)$ 共 3 種

(3)點數和是 11：$(6,5)$、$(5,6)$ 共 2 種

(4)點數和是 12：$(6,6)$ 共 1 種

這 4 個類別彼此互斥，由加法原理知，點數和大於 8 的情形共有 $4+3+2+1=10$（種）

5. 由 4 種陸地的走法中挑選 1 種，共有 4 種方法；由 3 種水路的走法中挑選 1 種，共有 3 種方法，依據乘法原理知，某人從甲地到乙地的走法共有 $4\times3=12$（種）走法



6. 設 A，B 分別表示參加數學與英文競試的同學所組成的集合，則由取捨原理知

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

故 $31=22+n(B)-11$，

得 $n(B)=31-22+11=20$

所以這班學生中有 20 位參加英文科競試

7. 令 A 為國文不及格學生所成之集合，B 為英文不及格學生所成之集合，C 為數學不及格學生所成之集合，則由題意

$n(A)=5$，$n(B)=15$，$n(C)=20$，$n(A\cap B)=3$，$n(A\cap C)=2$，$n(B\cap C)=8$，$n(A\cap B\cap C)=1$

所以 $n(A\cup B\cup C)$

$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)$
$\quad -n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

$=5+15+20-3-2-8+1=28$（位）

8. 令 $(a,b)\in S\cap T$

$\because (a,b)\in S\Rightarrow a=x$，$b=x+5\Rightarrow a-b+5=0$ ……①

$\because (a,b)\in T\Rightarrow a=y-1$，$b=x+1$

$\Rightarrow y=a+1$，$x=b-1$

又 $3x+2y=10\Rightarrow 3(b-1)+2(a+1)=10$

$\Rightarrow 2a+3b-11=0$……②

①、②解聯立可得 $a=\dfrac{-4}{5}$，$b=\dfrac{21}{5}$

9. $\because A=B$

$\therefore \begin{cases}1-x=2\\ y+5=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases}$

$\Rightarrow x+y=2$

10. $\because A=\{5,4,3\}$

$\therefore A$ 的子集共有 $2^3=8$ 個

11. $\because A\cap B=\{0,6\}$

$\therefore 4x-2=6$ 且 $y+2=0\Rightarrow x=2$，$y=-2$

12. $n(P)=5$，P 的子集共有 $2^5=32$（個）

13. $\because A\subset B$

$\therefore \begin{cases}A\cap B=A\\ A\cup B=B\\ A-B=\varnothing\end{cases}$

14. $\because n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$\therefore n(A\cup B)=4+7-2=9$

15. $\because A=\{$(正,正,反),(正,反,正),(反,正,正),(正,正,正)$\}$

$B=\{$(正,正,反),(正,反,正),(反,正,正)$\}$

$\therefore A\cap B=\{$(正,正,反),(正,反,正),(反,正,正)$\}$

16. (1) $(A\cup B)-C=\{1,3,4,5,6,7,8,9\}-\{3,4,5\}$
$=\{1,6,7,8,9\}$

(2) $(A-C)\cup(B-C)=\{1,7,9\}\cup\{6,8\}$
$=\{1,6,7,8,9\}$

17. $A=\{x\mid x<-1,x>2\}$，$A\cap B=\{x\mid 2<x\leq3\}$

且 $A\cup B=\boldsymbol{R}$

故 $B=\{x\mid -1\leq x\leq3\}\Rightarrow B=\{x\mid x^2-2x-3\leq0\}$

$\therefore a=-2$，$b=-3$

18. $\because A\cap B=\{4,5\}$

$\therefore \begin{cases}3a-2=4\\ 2b+3=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$

19. $\because A\subset B\subset C\subset D$

$\therefore (A\cup B)\cap(C\cup D)=B\cap D=B$

20. 設 A 為點數和為 5 之事件

$A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

B 為點數和為 5 中，有一顆為 3 點的事件，

則 $A\cap B=\{(2,3),(3,2)\}$

$\therefore n(A\cap B)=2$（個）

答案與解析

對應課本各章頁碼

21. A 的子集有：$\varnothing$、$\{1\}$、$\{2\}$、$\{1,2\}$，共四個

22. $A'=U-A=\{0,3,5,7,9\}$；

$B'=U-B=\{0,1,2,3,6\}$

$\Rightarrow A'\cap B'=\{0,3\}$

23. 元素個數有 $2\times 6=12$ 個

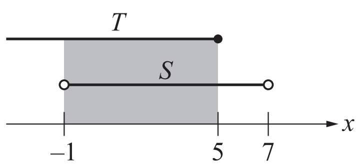
24. $\because S-T=\{3,7\}$

$\Rightarrow S-T=\{3,x+1\}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+1=7 \\ x-2=4 \end{cases}$

$\therefore x=6$

25.



由圖示知：

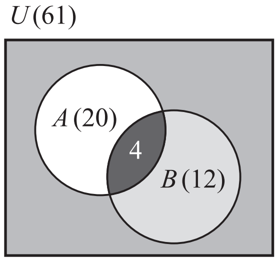
$S\cap T=\{x|-1<x\leq 5\}$

26. $\because S\cap T=\{7,9\}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1=7 \\ 4y-3=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

$\therefore x-y=3-3=0$

27. $U(61)$



令事件 A 為 3 的倍數

由 $61\div 3=20\cdots 1\Rightarrow n(A)=20$

令事件 B 為 5 的倍數

由 $61\div 5=12\cdots 1\Rightarrow n(B)=12$

再由 $61\div 15=4\cdots 1\Rightarrow n(A\cap B)=4$

又 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=20+12-4=28$

故 $n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)=61-28=33$ 個

3-1 實力測驗 P.94、95

1.(B)	2.(B)	3.(C)	4.(D)	5.(C)
6.(C)	7.(C)	8.(B)	9.(C)	10.(B)
11.(C)	12.(C)	13.(C)	14.(C)	15.(A)
16.(A)				

1. (A) 2 不是 A 的元素，(B) $\{2,3\}$ 是 A 的元素，(C) A 含有 4 個元素，(D) $\{4,5\}\subset A$，但 $\{4,5\}\notin A$

2. $A\cap B=\{1,2\}$

3. $A'=\{2,4,6,8\}$，$(B\cup C)=\{1,2,3,4,6,9\}$

則 $A'\cap(B\cup C)=\{2,4,6\}$

4. $2^5=32$ 個

5. $x=2$，$x+1=y+4$　$\therefore y+4=3$，$y=-1$

$x+y=2+(-1)=1$

6. 因 $A\cap B=\{3,5\}$　則 $2a-1=5\Rightarrow a=3$

$5b-2=3\Rightarrow b=1$　故 $ab=3$

7. $B-A=\{5,7\}$

8. $\begin{cases} 2x+y=5\cdots① \\ x-y=1\cdots② \end{cases}$

①+②得 $3x=6$，$x=2$

代入②式得 $y=1$，故 $A\cap B=\{(2,1)\}$

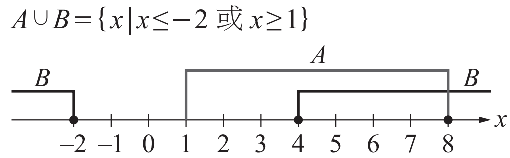
9. $(A\cup B)=5$ 的倍數所成的集合

$(A\cup B)\cap C=5$ 與 15 的最小公倍數所成的集合，即 15 的公倍數所成的集合，即 C

10. $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ 當 $B\subset A$ 時，至少有 7 個元素，當 $A\cap B=\varnothing$ 時，$A\cup B$ 有 11 個元素

11. 點數相同的事件 $A=\{(1,1)$，$(2,2)$，$(3,3)$，$(4,4)$，$(5,5)$，$(6,6)\}$，故 $n(A)=6$

12. $A\cup B=\{x|x\leq -2$ 或 $x\geq 1\}$



13. $n(S)=2^3=8$

14. n(4 或 6 的倍數)

$=n$(4 的倍數)$+n$(6 的倍數)$-n$(12 的倍數)

$=[\frac{1000}{4}]+[\frac{1000}{6}]-[\frac{1000}{12}]=250+166-83$

$=333$（個）

15. 設 A 為數學不及格的事件，設 B 為英文不及格的事件，$n(A\cup B)=40$，$n(A)=30$，$n(B)=23$，$n(A\cap B)=30+23-40=13$

所求$=n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=23-13=10$

16. 英文或數學至少有一科及格者有：

$37+30-17=50$

故兩科均不及格者有 $55-50=5$ 人

答案與解析

對應課本各章頁碼

3-2 機率的概念

重點一 機率的定義

範例 1- 老師導引 P.96

$S=\{$(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)$\}\Rightarrow n(S)=4$

(1) $A=\{$(正，反)，(反，正)$\}\Rightarrow n(A)=2$

$\therefore P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

(2) $B=\{$(正，反)，(反， 正)，(正，正)$\}$

$\Rightarrow n(B)=3 \quad \therefore P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{3}{4}$

範例 1- 學生演練 P.96

$S=\{$(正，正，正)，(正，正，反)，(正，反，正)，(正，反，反)，(反，正，正)，(反，正，反)，(反，反，正)，(反，反，反)$\}$

$\Rightarrow n(S)=2^3=8$

(1) $A=\{$(正，反，反)，(反，正，反)，(反，反，正)$\}\Rightarrow n(A)=3$

$\therefore P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{8}$

(2) $B=\{$(正，反，反)，(反，正，反)，(反，反，正)，(反，反，反)$\}$

$\Rightarrow n(B)=4$

$\therefore P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$

範例 2- 老師導引 P.97

$n(S)=6^2=36$

(1) $A=\{(1,4)$，$(2,3)$，$(3,2)$，$(4,1)\}\Rightarrow n(A)=4$

$\therefore P(A)=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

(2) $B=\{(3,6)$，$(4,5)$，$(5,4)$，$(6,3)$，$(4,6)$，$(5,5)$，$(6,4)$，$(6,5)$，$(5,6)$，$(6,6)\}$

$\Rightarrow n(B)=10$

$\therefore P(B)=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$

(3) $C=\{(1,1)$，$(1,2)$，$(2,1)\}\Rightarrow n(C)=3$

$\therefore P(C)=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

範例 2- 學生演練 P.97

$n(S)=6^2=36$

(1) $A=\{(3,6)$，$(4,5)$，$(5,4)$，$(6,3)\}$

$\Rightarrow n(A)=4$

$\therefore P(A)=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

(2) $B=\{(2,6)$，$(3,5)$，$(4,4)$，$(5,3)$，$(6,2)$，$(3,6)$，$(4,5)$，$(5,4)$，$(6,3)$，$(4,6)$，$(5,5)$，$(6,4)$，$(5,6)$，$(6,5)$，$(6,6)\}$

$\Rightarrow n(B)=15$

$\therefore P(B)=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$

(3) $C=\{(5,6)$，$(6,5)$，$(6,6)\}\Rightarrow n(C)=3$

$\therefore P(C)=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

範例 3- 老師導引 P.97

(1) A：2 球同色

則 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{C_2^5+C_2^4}{C_2^9}=\dfrac{4}{9}$

(2) B：2 球異色

則 $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{C_1^5\times C_1^4}{C_2^9}=\dfrac{5}{9}$

範例 3- 學生演練 P.97

(1) A：3 球同色

則 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{C_3^4+C_3^5}{C_3^9}=\dfrac{1}{6}$

(2) B：2 紅球 1 白球

則 $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{C_2^4\cdot C_1^5}{C_3^9}=\dfrac{5}{14}$

範例 4- 老師導引 P.98

偶數：2，4，6，8

奇數：1，3，5，7，9

(1) 設 A：3 球皆為偶數

則 $P(A)=\dfrac{C_3^4}{C_3^9}=\dfrac{1}{21}$

(2) 設 B：和為奇數 $\Rightarrow$ 1 奇 2 偶或 3 奇

則 $P(B)=\dfrac{C_1^5C_2^4+C_3^5}{C_3^9}=\dfrac{10}{21}$

(3) 設 C：積為偶數＝全部情形－積為奇數

則 $P(C)=1-\dfrac{C_3^5}{C_3^9}=1-\dfrac{5}{42}=\dfrac{37}{42}$

對應課本各章頁碼

範例 4- 學生演練 P.98

(1) 三位數為 4 的倍數

$\Rightarrow$ 末二位為 4 的倍數即可

$\Rightarrow$ 末二位為 12，16，24，28，32，36，48，52，56，64，68，72，76，84，92，96

$\therefore$ 共 $16\times7=112$ 個為 4 之倍數

故 $P=\dfrac{112}{P_3^9}=\dfrac{2}{9}$

(2) 三位數為 3 的倍數

$\Rightarrow$ 各位數字和為 3 的倍數

$3k$：3，6，9

$3k+1$：1，4，7

$3k+2$：2，5，8

$\therefore P=\dfrac{C_3^3\times3!+C_1^3C_1^3C_1^3\times3!}{P_3^9}=\dfrac{1}{3}$

(3) 三數積為完全立方者

有 $2^3=8\Rightarrow1，2，4$

$3^3=27\Rightarrow1，3，9$

$4^3=64\Rightarrow2，4，8$

$6^3=216\Rightarrow4，6，9$ 或 $3，8，9$

共 5 組，故 $P=\dfrac{5}{C_3^9}=\dfrac{5}{84}$

重點二　幾何機率

範例 1- 老師導引 P.99

設 S：$-6\le x\le 8\Rightarrow$ 長度為 $8-(-6)=14$

A：$|x|\le3\Rightarrow-3\le x\le3$

$\Rightarrow$ 長度為 $3-(-3)=6$

故 $P=\dfrac{6}{14}=\dfrac{3}{7}$

範例 1- 學生演練 P.99

設 S：$-16\le x\le14\Rightarrow$ 長度為 $14-(-16)=30$

A：$|x-3|\le3\Rightarrow-3\le x-3\le3$

$\Rightarrow 0\le x\le6$

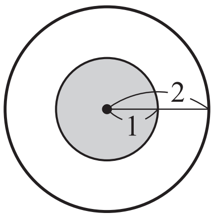
$\Rightarrow$ 長度為 $6-0=6$

故 $P=\dfrac{6}{30}=\dfrac{1}{5}$

範例 2- 老師導引 P.99

設 S 為半徑 $=2$ 之圓內部，則此點為在半徑 $=1$ 之圓內部，如圖所示，

所求 $P=\dfrac{\pi\cdot1^2}{\pi\cdot2^2}=\dfrac{1}{4}$



範例 2- 學生演練 P.99

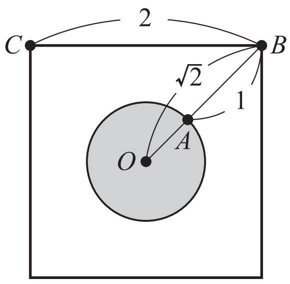
正方形邊長 $\overline{BC}=2$，$\overline{OB}=\sqrt{2}$，$\overline{AB}=1$

$\Rightarrow\overline{OA}=\sqrt{2}-1$

即所求點之位置為在半徑 $\overline{OA}=\sqrt{2}-1$ 之圓內部，故所求

$P=\dfrac{\pi(\sqrt{2}-1)^2}{2\times2}$

$=\dfrac{(3-2\sqrt{2})\pi}{4}$



重點三　機率的性質

範例 1- 老師導引 P.101

(1) $P(A)=1-P(A')=1-0.5=0.5$

(2) $P(B')=1-P(B)=1-0.6=0.4$

(3) $P(A\cup B)=0.5+0.6-0.4=0.7$

(4) $P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=0.6-0.4=0.2$

(5) $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$

$=1-0.7=0.3$

(6) $P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)$

$=1-0.4=0.6$

範例 1- 學生演練 P.101

(1) $P(A)=1-P(A')=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{3}+P(B)-\dfrac{1}{4}$　$\therefore P(B)=\dfrac{2}{3}$

(3) $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$

(4) $P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$

(5) $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$

$=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$

(6) $P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)$

$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

範例 2- 老師導引 P.101

$P(A\cap B)=P(B\cap C)=0\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=0$

則 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$

$-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-0-0-\frac{1}{5}+0=\frac{4}{5}$

範例 2- 學生演練 P.101

$P(B\cap C)=P(C\cap A)=0\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=0$

則 $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$

$-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-0-0+0=\frac{5}{8}$

範例 3- 老師導引 P.102

A、B 互斥 $\Rightarrow A\cap B=\varnothing$ $\therefore P(A\cap B)=0$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=0.3+0.4-0$

$=0.7$

則(1) $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$

$=1-0.7=0.3$

(2) $P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=1-P(A\cap B)$

$=1-0=0$

範例 3- 學生演練 P.102

A、B 互斥 $\Rightarrow A\cap B=\varnothing$ $\therefore P(A\cap B)=0$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=0.2+0.5-0$

$=0.7$

則(1) $P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

$=0.5-0=0.5$

(2) $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$

$=1-0.7=0.3$

重點四　條件機率

範例 1- 老師導引 P.103

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow\frac{11}{12}=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}-P(A\cap B)$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

(2) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$

(3) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}}=\frac{2}{5}$

(4) $P(A'|B')=\dfrac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$

$=\dfrac{1-\frac{11}{12}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{4}$

範例 1- 學生演練 P.103

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{2}{5}+\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$

(2) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}$

(3) $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}$

(4) $P(A'|B')=\dfrac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$

$=\dfrac{1-\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{5}$

範例 2- 老師導引 P.104

設 A(點數和為 6)

$=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$

$\Rightarrow n(A)=5$

B(一顆為 2 點)

$\Rightarrow A\cap B=\{(2,4),(4,2)\}\Rightarrow n(A\cap B)=2$

則 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{2/n(S)}{5/n(S)}=\frac{2}{5}$

範例 2- 學生演練 P.104

設 A(點數和為 8)

$=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

$\Rightarrow n(A)=5$

B(一顆為 3 點)

$\Rightarrow A\cap B=\{(3,5),(5,3)\}\Rightarrow n(A\cap B)=2$

則 $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{2/n(S)}{5/n(S)}=\frac{2}{5}$

對應課本各章頁碼

範例 3- 老師導引 P.104

(1) 設 A：第一次取到紅球

B：第二次取到紅球

則 $P(A)=\dfrac{3}{3+5}=\dfrac{3}{8}$

$P(B|A)=\dfrac{2}{2+5}=\dfrac{2}{7}$

∴二次都取到紅球的機率為

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B|A)=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{2}{7}=\dfrac{3}{28}$

(2) 所求為$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{2}{7}+\dfrac{5}{8}\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{3}{8}$

範例 3- 學生演練 P.104

(1) 設 A：甲中獎

B：乙中獎

則 $P(A)=\dfrac{3}{10}$

$P(B|A)=\dfrac{2}{9}$

∴甲、乙均中獎的機率為

$P(A\cap B)=P(A)\,P(B|A)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{15}$

(2) 所求為$\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}+\dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{9}=\dfrac{3}{10}$

重點五　獨立事件

範例 1- 老師導引 P.105

(1) A、B 互斥 $\Rightarrow A\cap B=\varnothing$　∴ $P(A\cap B)=0$

則 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{5}-0$

$=\dfrac{14}{15}$

(2) A、B 獨立 $\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$

則 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{5}$

$=\dfrac{11}{15}$

範例 1- 學生演練 P.105

(1) A、B 互斥 $\Rightarrow P(A\cap B)=0$

則 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow\dfrac{7}{12}=P(A)+\dfrac{1}{4}-0$

$\Rightarrow P(A)=\dfrac{1}{3}$

(2) A、B 獨立 $\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$

則 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow\dfrac{7}{12}=P(A)+\dfrac{1}{4}-P(A)\times\dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow P(A)=\dfrac{4}{9}$

範例 2- 老師導引 P.106

設 A：甲成功 $\Rightarrow P(A)=\dfrac{1}{2}$

B：乙成功 $\Rightarrow P(B)=\dfrac{1}{3}$

則(1) $P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

(2) $P(A\cap B')+P(A'\cap B)$

$=P(A)\,P(B')+P(A')\,P(B)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot(1-\dfrac{1}{3})+(1-\dfrac{1}{2})\cdot\dfrac{1}{3}$

$=\dfrac{1}{2}$

(3) $P(A'\cap B')=P(A')\,P(B')$

$=(1-\dfrac{1}{2})(1-\dfrac{1}{3})$

$=\dfrac{1}{3}$

範例 2- 學生演練 P.106

設 A：甲解出 $\Rightarrow P(A)=\dfrac{3}{4}$

B：乙解出 $\Rightarrow P(B)=\dfrac{2}{5}$

則(1) $P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$

$=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{3}{10}$

(2) $P(A\cap B')+P(A'\cap B)$

$=P(A)\,P(B')+P(A')\,P(B)$

$=\dfrac{3}{4}\cdot(1-\dfrac{2}{5})+(1-\dfrac{3}{4})\cdot\dfrac{2}{5}$

$=\dfrac{11}{20}$

(3) $P(A'\cap B')=P(A')\,P(B')$

$=(1-\dfrac{3}{4})(1-\dfrac{2}{5})=\dfrac{3}{20}$

(4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{17}{20}$

答案與解析

對應課本各章頁碼

範例 3- 老師導引 P.107

設 A：甲命中 $\Rightarrow P(A)=\dfrac{1}{2}$

B：乙命中 $\Rightarrow P(B)=\dfrac{1}{3}$

C：丙命中 $\Rightarrow P(C)=\dfrac{1}{4}$

則：

(1) $P(A'\cap B'\cap C')=P(A')P(B')P(C')$

$=(1-\dfrac{1}{2})\cdot(1-\dfrac{1}{3})\cdot(1-\dfrac{1}{4})=\dfrac{1}{4}$

(2) $P(A\cup B\cup C)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$

$-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}$

$+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

(3) $P(A\cap B'\cap C')+P(A'\cap B\cap C')$

$+P(A'\cap B'\cap C)$

$=P(A)P(B')P(C')+P(A')P(B)P(C')$

$+P(A')P(B')P(C)$

$=\dfrac{1}{2}\cdot(1-\dfrac{1}{3})\cdot(1-\dfrac{1}{4})+(1-\dfrac{1}{2})\cdot\dfrac{1}{3}$

$\cdot(1-\dfrac{1}{4})+(1-\dfrac{1}{2})\cdot(1-\dfrac{1}{3})\cdot\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{11}{24}$

範例 3- 學生演練 P.107

設 A：甲考上 $\Rightarrow P(A)=\dfrac{1}{3}$

B：乙考上 $\Rightarrow P(B)=\dfrac{1}{4}$

C：丙考上 $\Rightarrow P(C)=\dfrac{1}{6}$

則：

(1) $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{72}$

(2) $P(A\cap B\cap C')+P(A\cap B'\cap C)$

$+P(A'\cap B\cap C)$

$=P(A)P(B)P(C')+P(A)P(B')P(C)$

$+P(A')P(B)P(C)$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot(1-\dfrac{1}{6})+\dfrac{1}{3}\cdot(1-\dfrac{1}{4})\cdot\dfrac{1}{6}$

$+(1-\dfrac{1}{3})\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{36}$

(3) $1-P(A'\cap B'\cap C')$

$=1-P(A')P(B')P(C')$

$=1-(1-\dfrac{1}{3})(1-\dfrac{1}{4})(1-\dfrac{1}{6})$

$=1-\dfrac{5}{12}=\dfrac{7}{12}$

範例 4- 老師導引 P.108

(1) 所求 $=\dfrac{5}{8}\times 90\%+\dfrac{3}{8}\times 50\%$

$=\dfrac{3}{4}$

(2) 所求 $=\dfrac{\dfrac{5}{8}\times 90\%}{\dfrac{5}{8}\times 90\%+\dfrac{3}{8}\times 50\%}$

$=\dfrac{3}{4}$

範例 4- 學生演練 P.108

(1) 所求 $=60\%\times 90\%+40\%\times 70\%$

$=0.54+0.28=0.82$

(2) 所求 $=\dfrac{40\%\times 70\%}{60\%\times 90\%+40\%\times 70\%}$

$=\dfrac{0.28}{0.54+0.28}$

$=\dfrac{14}{41}$

範例 5- 老師導引 P.108

(1) $P(\text{黑球})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}$

$=\dfrac{49}{80}$

(2) $P(A|\text{黑球})=\dfrac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{8}}{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{8}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}}$

$=\dfrac{25}{49}$

範例 5- 學生演練 P.108

(1) $P(\text{不良品})=20\%\times 3\%+30\%\times 2\%$

$+50\%\times 1\%$

$=0.017$

(2) $P(A|\text{不良品})$

$=\dfrac{20\%\times 3\%}{20\%\times 3\%+30\%\times 2\%+50\%\times 1\%}$

$=\dfrac{6}{17}$

對應課本各章頁碼

3-2 學習成效驗收 P.109、110

1. 3 球皆不同色的機率$=\dfrac{C_1^3\times C_1^4\times C_1^5}{C_3^{12}}=\dfrac{3}{11}$

2. 機率$=\dfrac{C_3^5\times 12\times C_1^2\times 11\times C_1^1\times 10}{12^5}$
$=\dfrac{10\times 12\times 2\times 11\times 10}{12\times 12\times 12\times 12\times 12}=\dfrac{275}{2592}$

3. 機率$=\dfrac{C_6^8+C_7^8+C_8^8}{2^8}=\dfrac{37}{256}$

4. 機率$=\dfrac{C_1^3\ C_1^4}{C_2^7}=\dfrac{12}{21}=\dfrac{4}{7}$

5. 至少投中一次機率$=1-(n$ 次皆不中的機率$)$
$\therefore\ 1-(\dfrac{4}{5})^n>\dfrac{1}{2}\Rightarrow -(\dfrac{4}{5})^n>-\dfrac{1}{2}\Rightarrow(\dfrac{4}{5})^n<\dfrac{1}{2}$
$n(\log 4-\log 5)<\log 1-\log 2$
$\Rightarrow n(3\log 2-1)<-\log 2\Rightarrow -0.097n<-0.301$
$\therefore\ n>3.1\cdots\cdots$，取 $n=4$

6. $\dfrac{6!\times 2!}{7!}=\dfrac{2}{7}$

7. $p=1-$三次都不進的機率$=1-(0.4)^3=0.936$

8. $\because\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$\therefore\dfrac{29}{60}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\dfrac{1}{10}$
故 $P(B'|A)=\dfrac{P(B'\cap A)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{3}{5}$

9. $\because\ A$ 與 B 為獨立事件
$\therefore\ P(A\cap B)=P(A)P(B)$
又 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$\Rightarrow\dfrac{4}{5}=P(A)+\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}P(A)=\dfrac{1}{3}P(A)+\dfrac{2}{3}$
$\Rightarrow P(A)=\dfrac{2}{5}$

10. $\because\ |x-2|\le 3\Rightarrow -1\le x\le 5$
$\Rightarrow 2\le x\le 5$（在區間 $\{2,10\}$ 內）
$\therefore$機率$=\dfrac{5-2}{10-2}=\dfrac{3}{8}$

11. 點數和為 8 的情形有：
$\{(6,2)$，$(5,3)$，$(4,4)$，$(3,5)$，$(2,6)\}$
$\therefore$機率$=\dfrac{2}{5}$

12. $P(B')=1-P(B)=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$
$P(A'\cap B')=P[(A\cup B)']=1-P(A\cup B)=1-\dfrac{1}{2}$
$=\dfrac{1}{2}$
$P(A'|B')=\dfrac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}}=\dfrac{5}{8}$

13. 甲、乙解題互不影響，為獨立事件，2 人均解出的機率 $p_1=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{20}$
此題被解出的機率
$p_2=1-$（甲、乙均未解出的機率）
$=1-(1-\dfrac{3}{5})\times(1-\dfrac{1}{4})=\dfrac{7}{10}$

14. 所求機率$=\dfrac{5}{9}\times\dfrac{2}{9}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{20}{729}$

15. 所求機率$=\dfrac{C_2^4}{C_2^{10}}=\dfrac{6}{45}=\dfrac{2}{15}$

16. 設樣本空間為 S，則 $n(S)=C_4^7=35$
A 為恰為 2 男 2 女的事件，則 $n(A)=C_2^3\times C_2^4$
$=3\times 6=18$
$\therefore\ P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{18}{35}$

17. 設 A 表示第一次出現正面的事件
$A=\{(+++)$，$(++-)$，$(+-+)$，$(+--)\}$
$\Rightarrow n(A)=4$
B 為擲三次中恰出現二次正面的事件
$B=\{(++-)$，$(+-+)$，$(-++)\}$
$A\cap B=\{(++-)$，$(+-+)\}\Rightarrow n(A\cap B)=2$
$\therefore\ P(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

18. $\because$點數和大於 9 者有
$(4,6)$，$(5,5)$，$(6,4)$，$(5,6)$，$(6,5)$，$(6,6)$，
共 6 個
而有一個 4 點者有 2 個
$\therefore$所求$=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

19. 7、7、8、9 之排列方式有$\dfrac{4!}{2!}=12$ 種可能
$\therefore$所求機率$=\dfrac{1}{12}$

20. $\because$最大數 $x=5$
$\Rightarrow$應自編號 1 ～ 4 的球中再取 2 球
$\therefore$所求$\dfrac{C_2^4}{C_3^8}=\dfrac{3}{28}$

21. $\dfrac{\frac{30}{100}\times\frac{1}{3}}{\frac{30}{100}\times\frac{1}{3}+\frac{40}{100}\times\frac{3}{5}+\frac{30}{100}\times\frac{1}{4}}=\dfrac{20}{83}$

答案與解析

對應課本各章頁碼

3-2 實力測驗 P.111 ～ 113

1.(D)	2.(B)	3.(B)	4.(B)	5.(C)
6.(D)	7.(D)	8.(D)	9.(D)	10.(B)
11.(D)	12.(D)	13.(A)	14.(A)	15.(C)
16.(D)	17.(D)	18.(B)	19.(B)	20.(B)
21.(D)				

1. $P(A\cup B)+P(A\cap B')$
$=[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]+[P(A)-P(A\cap B)]$
$=2P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$
$=2\times 0.4+0.5-2\times 0.3=0.7$

2. $P=\dfrac{C_2^3}{2^3}=\dfrac{3}{8}$

3. 設 A 表點數和為 8 之事件，則
$A=\{(2,6)，(3,5)，(4,4)，(5,3)，(6,2)\}$
$\Rightarrow n(A)=5$
又 B 表有一顆為 4 點的事件
$\Rightarrow A\cap B=\{(4,4)\}\Rightarrow n(A\cap B)=1$
$\therefore$所求機率為 $P(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{1}{5}$

4. $P=\dfrac{C_2^4}{C_8^3}=\dfrac{6}{56}=\dfrac{3}{28}$

5. $A=\{(5,6)，(6,5)，(6,6)\}$
$n(S)=6^2=36$，$n(A)=3$
故 $P=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

6. 設點數和為 9 的事件為 $A=\{(3,6)，(6,3)，(4,5)，(5,4)\}$
樣本空間的元素個數為 $n(S)=6^2=36$
故點數和為 9 的機率為$\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

7. 取出含有壞燈泡的機率
$=1-$取出均不含壞燈泡的機率
$=1-\dfrac{C_3^{20}}{C_3^{30}}=1-\dfrac{57}{203}=\dfrac{146}{203}$

8. $\dfrac{\frac{5!}{2!\,2!\,1!}}{3^5}=\dfrac{30}{243}=\dfrac{10}{81}$

9. $0.4\times 0.6\times 0.5=0.12$

10. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B)$
$=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$

11. $P(x=3)=1-0.05-0.13-0.27-0.15-0.04$
$=0.36$
$P(x\geq 2)=1-P(x=0)-P(x=1)=1-0.05-0.13$
$=0.82$
$P(x\leq 3)=1-P(x=4)-P(x=5)=1-0.15-0.04$
$=0.81$
$P(x=3\vee 4)=P(x=3)+P(x=4)=0.36+0.15$
$=0.51$

12. 第一次出現 5 點的機率為$\dfrac{1}{6}$，第二次出現偶數點的機率為$\dfrac{1}{2}$，故機率為$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{12}$

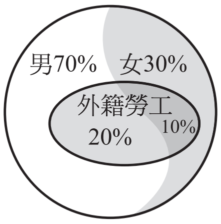
13.
良品 0.95 ─ 良品 0.8
良品 0.95 ─ 不良品 0.2
不良品 0.05 ─ 良品 0.16
不良品 0.05 ─ 不良品 0.84

$P=\dfrac{0.05\times 0.16}{0.95\times 0.8+0.05\times 0.16}=\dfrac{0.008}{0.768}=0.0104$

14. $\dfrac{600}{600+400}\times 36\%+\dfrac{400}{600+400}\times 46\%$
$=0.216+0.184=0.4=40\%$

15. 設此點距圓心 r，圓的半徑為 R
由題意知 $r<\dfrac{1}{3}(R-r)$，解出 $r<\dfrac{1}{4}R$
故機率為$\dfrac{\pi(\frac{1}{4}R)^2}{\pi R^2}=\dfrac{1}{16}$

16. $70\%\times 20\%+30\%\times 10\%$
$=0.14+0.03=0.17$



17. $P=\dfrac{C_2^4\times C_1^5}{C_3^9}=\dfrac{30}{84}=\dfrac{5}{14}$

18. $P=\dfrac{\frac{4!}{3!}\times 2!}{4!}=\dfrac{1}{3}$

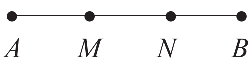
19. 出現反面的機率為 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

又自 $\{2,4,6,8\}$ 中任選一數為 3 的倍數只有 6，機率為$\frac{1}{4}$

自 $\{1,3,5,7,9\}$ 中任選一數為 3 的倍數的有 3 及 9，機率為$\frac{2}{5}$

故 $P=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{17}{50}$

20. 如圖，將 $\overline{AB}$ 三等分



M、N 為等分點，則凡是在 $\overline{NB}$ 上的點到 A 的距離都會大於到 B 的距離的 2 倍，故機率為

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{AB}}=\frac{\frac{1}{3}\overline{AB}}{\overline{AB}}=\frac{1}{3}$$

21. $P=\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{5}=\frac{83}{100}$

答案與解析

對應課本各章頁碼

3-3 數學期望值

重點一 數學期望值

範例 1- 老師導引 P.114

$E=30\times\frac{1}{6}=5$（元）

範例 1- 學生演練 P.114

設 A：點數和為 $6=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$

$\Rightarrow P(A)=\frac{5}{36}$

$\therefore E=36\times\frac{5}{36}=5$（元）

範例 2- 老師導引 P.114

設 A：偶數點 $=\{2,4,6\}$

$\Rightarrow P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

B：奇數點 $=\{1,3,5\}$

$\Rightarrow P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

則 $E=5\times\frac{1}{2}+(-4)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$（元）

範例 2- 學生演練 P.114

設 A：奇數點 $=\{1,3,5\}\Rightarrow P(A)=\frac{3}{6}$

B：$\{2,4\}\Rightarrow P(B)=\frac{2}{6}$

C：$\{6\}\Rightarrow P(C)=\frac{1}{6}$

則 $E=100\times\frac{3}{6}+60\times\frac{2}{6}+(-30)\times\frac{1}{6}$

$=65$（元）

範例 3- 老師導引 P.115

$E=10\times\frac{2}{10}+50\times\frac{3}{10}+100\times\frac{5}{10}=67$（元）

範例 3- 學生演練 P.115

$E=10\times\frac{C_1^4C_2^6}{C_3^{10}}+20\times\frac{C_2^4C_1^6}{C_3^{10}}+30\times\frac{C_3^4}{C_3^{10}}$

$=10\times\frac{1}{2}+20\times\frac{3}{10}+30\times\frac{1}{30}$

$=12$（元）

範例 4- 老師導引 P.115

$P(\text{三正})=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$

$P(\text{二正})=C_2^3(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}$

$P(\text{一正})=C_1^3(\frac{1}{2})^3=\frac{3}{8}$

$P(\text{三反})=(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{8}$

$\therefore 8\times\frac{1}{8}+3\times\frac{3}{8}+1\times\frac{3}{8}+(-20)\times\frac{1}{8}$

$=0$（元）

範例 4- 學生演練 P.115

$n(S)=9+6+3=18$

則 $E=10\times\frac{9}{18}+100\times\frac{6}{18}+1000\times\frac{3}{18}$

$=205$（元）

範例 5- 老師導引 P.116

發生火災的機率 $=0.0015$

所以不發生火災的機率 $=1-0.0015=0.9985$

利潤期望值

$=2000\times0.9985+(-1000000+2000)\times0.0015$

$=1997-1497$

$=500$（元）

範例 5- 學生演練 P.116

生存的機率 $=0.998$

死亡的機率 $=1-0.998=0.002$

保險公司獲利的期望值為

$3000\times0.998+(-1000000+3000)\times0.002$

$=2994-1994$

$=1000$（元）

3-3 學習成效驗收 P.117、118

1. 4 正　　：$3\cdot4+2=14$
   3 正 1 反：$(3\cdot3+2)-1^2=10$
   2 正 2 反：$(3\cdot2+2)-2^2=4$
   1 正 3 反：$(3\cdot1+2)-3^2=-4$
   4 反　　：$-4^2=-16$

   $\therefore E=\frac{1}{16}\times14+\frac{4}{16}\times10+\frac{6}{16}\times4+\frac{4}{16}\times(-4)$
   $+\frac{1}{16}\times(-16)=\frac{23}{8}$（元）

對應課本各章頁碼

2. 一　二　三　四　…
正　　　　　　甲勝
反　正　　　　乙勝
反　反　正　　甲勝
反　反　反　正　乙勝

甲先投出正面的機率

$=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^5+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{2}{3}$

$\therefore$甲的期望值$=300\times\frac{2}{3}=200$（元）

3. 擲一公正的骰子，可能出現的點數為 1、2、3、4、5、6，且每一個點數出現的機率均為$\frac{1}{6}$故擲公正骰子一次的期望值為

$E=\frac{1}{6}\times(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$（點）

4. 取 2 張百元$\Rightarrow P_1=\frac{C_2^3}{C_2^5}=\frac{3}{10}$，$m_1=200$

取 2 張 50 元$\Rightarrow P_2=\frac{C_2^2}{C_2^5}=\frac{1}{10}$，$m_2=100$

取 1 張百元、1 張 50 元$\Rightarrow P_3=\frac{C_1^3\times C_1^2}{C_2^5}=\frac{6}{10}$，

$m_3=150$

$\therefore$所求期望值

$E=P_1\times m_1+P_2\times m_2+P_3\times m_3$

$=\frac{3}{10}\times200+\frac{1}{10}\times100+\frac{6}{10}\times150=160$（元）

5. 設 S 表示出現點數和為 8 的事件

$S=\{(2,6)，(3,5)，(4,4)，(5,3)，(6,2)\}$

$\Rightarrow n(S)=5$

A 表示出現點數和為 8 且其中有一顆點數為 4 的事件

$A=\{(4,4)\}\Rightarrow n(A)=1$

$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{1}{5}$

$\therefore E=\frac{1}{5}\times50+(1-\frac{1}{5})\times(-5)$

$=10-4=6$（元）

6. 期望值 $E=\frac{15}{2000}\times400=3$（粒）

7. 設樣本空間 S，則 $n(S)=6\times6=36$

點數和為質數有：

$(1,1)，(1,2)，(2,1)，(1,4)，(2,3)，(3,2)，(4,1)，(1,6)，(2,5)，(3,4)，(4,3)，(5,2)，(6,1)，(5,6)，(6,5)$，共 15 個

$\frac{15}{36}\times9+\frac{21}{36}\times(-3)=2$（元）

8.

情形	2 正	1 正	0 正
機率	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$
金額（元）	200	100	-300

$E=\frac{1}{4}\times200+\frac{2}{4}\times100+\frac{1}{4}\times(-300)=25\neq0$

$\therefore$不符合公平原則

9. 設其餘 4 個硬幣面值為 x 元

$\Rightarrow(\frac{6}{10}\times5+\frac{4}{10}\times x)\times2=14$

$\Rightarrow x=10$

10. $n(S)=6\times6=36$

令事件 A 表兩顆同點數

$\Rightarrow A=\{(1,1)，(2,2)，(3,3)，(4,4)，(5,5)，(6,6)\}$

$\Rightarrow n(A)=6$

$\Rightarrow P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

$\therefore E=\frac{1}{6}\times900=150$（元）

11.

情形	生存	死亡
機率	0.998	0.002
金額（元）	3000	-997000

E(利潤)$=0.998\times3000+0.002\times(-997000)$

$=1000$（元）

12.

情形	0 正	1 正	2 正	3 正
金額（元）	-16	4	8	12
機率	$\frac{C_0^3}{2^3}=\frac{1}{8}$	$\frac{C_1^3}{2^3}=\frac{3}{8}$	$\frac{C_2^3}{2^3}=\frac{3}{8}$	$\frac{C_3^3}{2^3}=\frac{1}{8}$

$E=(-16)\times\frac{1}{8}+4\times\frac{3}{8}+8\times\frac{3}{8}+12\times\frac{1}{8}=4$（元）

答案與解析

對應課本各章頁碼

3-3 實力測驗

P.119、120

1.(A)	2.(C)	3.(D)	4.(C)	5.(B)
6.(B)	7.(C)	8.(B)	9.(C)	10.(A)
11.(C)	12.(A)	13.(C)	14.(A)	

1. 10 元$\times\frac{1}{2}=5$ 元

2. $\frac{6}{10}\times 40=24$ 元

3. 猜對的機率為$\frac{1}{4}$，猜錯的機率為$\frac{3}{4}$

   故 $5\times\frac{1}{4}-S\times\frac{3}{4}=0$，解出 $S=\frac{5}{3}$

4. 共有 $2+3=5$ 張鈔票

   $E(X)=2$ 張均為百元$+2$ 張均為五十元

   $+1$ 張為百元 1 張為五十元的期望值

   $=100$ 元$\times 2\times\frac{C_2^2}{C_2^5}+50$ 元$\times 2\times\frac{C_2^3}{C_2^5}$

   $+(100$ 元$+50$ 元$)\times\frac{C_1^2\times C_1^3}{C_2^5}$

   $=200$ 元$\times\frac{1}{10}+100$ 元$\times\frac{3}{10}+150$ 元$\times\frac{6}{10}$

   $=20$ 元$+30$ 元$+90$ 元$=140$ 元

5. $E(ax)=aE(x)$

   ∵投擲一粒均勻骰子點數的期望值為

   $E(x)=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{7}{2}$

   ∴同時擲三粒均勻骰子，點數總和的期望值為

   $E(3x)=3E(x)=3\times\frac{7}{2}=\frac{21}{2}$

6. 出現奇數點的機率為$\frac{1}{2}$

   出現 2 或 4 點的機率為$\frac{1}{3}$

   出現 6 點的機率為$\frac{1}{6}$

   故期望值為 5 元$\times\frac{1}{2}-3$ 元$\times\frac{1}{3}-6$ 元$\times\frac{1}{6}$

   $=\frac{1}{2}$元

7. $\frac{6}{10}\times 40+\frac{4}{10}\times 60=48$ 元

8. $\frac{1}{4}\times 5+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{4}\times 1=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$元

9. 恰 2 枚正面之機率為$\frac{C_2^4}{2^4}=\frac{6}{16}$，不是恰二正面之機率為 $1-\frac{6}{16}=\frac{10}{16}$，故期望值為

   $\frac{6}{16}\times 2-\frac{10}{16}\times 1=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$元

10. 點數和為質數有：2，3，5，7，11 又點數和為質數之機率

    $P=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{4}{36}+\frac{6}{36}+\frac{2}{36}=\frac{5}{12}$

    ∴期望值 $E(x)=P\times 10+(1-P)(-2)$

    $=\frac{5}{12}\times 10+(1-\frac{5}{12})(-2)=3$ 元

11. $10\times\frac{3}{7}+5\times\frac{4}{7}=\frac{50}{7}$元

12. 可得獎金期望值為

    $\frac{2}{1000}\times 1000+\frac{6}{1000}\times 500+\frac{45}{1000}\times 100=9.5$ 元

13. ⑴出現 3 正之機率為：$\frac{1}{8}$

    ⑵出現 2 正 1 反之機率為：$\frac{3}{8}$

    ⑶出現 1 正 2 反之機率為：$\frac{3}{8}$

    ⑷出現 3 反之機率為：$\frac{1}{8}$

    所求期望值為

    $\frac{1}{8}(2\times 3-1)+\frac{3}{8}(2\times 2-1)+\frac{3}{8}(2\times 1-1)$

    $+\frac{1}{8}(-15)=\frac{1}{4}$

14. $E=\frac{8}{1000}\times 200=\frac{8}{5}=1.6$

對應課本各章頁碼

3-4 統計的基本概念

重點一　統計抽樣

範例 1- 老師導引　P.121

(1) 母群體：工廠生產 10000 個燈泡的整體
樣本：隨機抽出 100 個所形成之集合
(2) 母群體數：10000
樣本數：100

範例 1- 學生演練　P.121

(1) 母群體：台科大全體師生 5000 人的整體
樣本：隨機抽出 200 人所形成之集合
(2) 母群體數：5000
樣本數：200

重點二　抽樣方法

範例 1- 老師導引　P.123

依各抽樣的特性，各小題的抽樣方法為
(1) B　(2) D　(3) A　(4) C

範例 1- 學生演練　P.123

依各抽樣的特性，各小題的抽樣方法為
(1) B　(2) D　(3) C　(4) A

範例 2- 老師導引　P.124

由第 9、10 行選出的數字依序為
(55) (88) 04 (76) (98) (93) 18 (57) (78) (57) 34 (60) (90) 20 41
括號中的數字表示超過班上的座號或重複應捨棄，所以選出的座號為：
4、18、34、20、41 等 5 位同學

範例 2- 學生演練　P.124

由第 21、22 行選出的數字依序為
17 (82) 27 (49) (78) 37 (58) (55) 33 (50) 26
括號中的數字表示超過班上的座號或重複應捨棄，所以選出的座號為：
17、27、37、33、26 等 5 位同學

範例 3- 老師導引　P.124

因 $120 \div 10 = 12$
故每隔 12 號抽選一個號碼，而且 35 號的住戶被抽到，於是被抽到的 10 個住戶編號為：
35、47、59、71、83、95、107、119、11、23

範例 3- 學生演練　P.124

因 $45 \div 5 = 9$
故每隔 9 號抽選一個號碼，而且 17 號的同學被抽到，於是被抽到的 5 個同學座號為：
17、26、35、44、8

範例 4- 老師導引　P.125

第一層樣本：83、91、93
第二層樣本：68、70、72、78
第三層樣本：34、38、51
則第一層平均 $\dfrac{83+91+93}{3} = 89$
第二層平均 $\dfrac{68+70+72+78}{4} = 72$
第三層平均 $\dfrac{34+38+51}{3} = 41$
$\therefore$ 平均成績為 $\dfrac{89\times150+72\times200+41\times50}{150+200+50}$
$= \dfrac{29800}{400} = 74.5$ 分

範例 4- 學生演練　P.125

第一層樣本：82、85、91
第二層樣本：62、70、72、76
第三層樣本：47、54、58
則第一層平均 $\dfrac{82+85+91}{3} = 86$
第二層平均 $\dfrac{62+70+72+76}{4} = 70$
第三層平均 $\dfrac{47+54+58}{3} = 53$
平均體重為 $\dfrac{86\times150+70\times200+53\times150}{150+200+150}$
$= \dfrac{34850}{500} = 69.7$ 公斤

範例 5- 老師導引　P.126

(1) $\dfrac{1}{10}(90+20+60+50+80+30+80+90+100+40) = 64$（分）
(2) 這是部落抽樣法

範例 5- 學生演練　P.126

原住民國小兒童的平均身高＝選取第二部落平均身高 $= \dfrac{1}{8}(163+152+138+145+149+150+142+160) = 149.875$（公分）

答案與解析

對應課本各章頁碼

3-4 學習成效驗收 P.127、128

1. 部落
2. 系統
3. 因為每位同學被抽中的機率均等，且隨機抽取 5 位同學作為樣本，此種抽樣方法為簡單隨機抽樣
4. 分層隨機
5. 簡單隨機
6. 10,4,8,1,5
7. ⑴台科大全體學生
   ⑵ 500 人
8. 因為每位同學被抽中的機率均等，且隨機抽取 10 位同學作為樣本，此種抽樣方法為簡單隨機抽樣
9. 10 人中男生占 $10\times\frac{27}{27+18}=10\times\frac{3}{5}=6$ 位
   10 人中女生占 $10\times\frac{18}{27+18}=10\times\frac{2}{5}=4$ 位
   ∴組成方式共有 $C_6^{27}\times C_4^{18}$ 種
10. 將每個班級視為一個聚落，成為全校的縮影，因此只要隨機取一個班級作普查即可，此即為部落抽樣
11. 抽出 7、17、27、37、47，即每間隔 10 位就抽一位，屬於系統抽樣
12. 由摸彩箱隨機抽出 12 張，屬於簡單隨機抽樣
13. ∵女生：男生＝250：150＝5：3
   $\Rightarrow$ 女生抽出 $\frac{5}{5+3}\times40=25$ 人
   ∴所求機率＝$\frac{25}{250}=\frac{1}{10}$
14. 由 $\frac{40}{4}=10$
   $\Rightarrow$ 抽中號碼為 $15\underset{+10}{、}25\underset{+10}{、}35\underset{+10}{、}5$（即 45−40=5）
   ∴ 38 號怡靜不會被抽中
15. 男生要抽出 $15\times\frac{40}{120}=5$ 人
   則陳登翊被抽中的機率為 $\frac{5}{40}=\frac{1}{8}$

3-4 實力測驗 P.129～131

1.(C) 2.(D) 3.(B) 4.(A) 5.(C)
6.(B) 7.(A) 8.(C) 9.(A) 10.(A)
11.(C) 12.(D)

1. 按抽樣方法的定義為分層抽樣
2. 按抽樣方法的定義為部落抽樣
3. 按抽樣方法的定義為系統抽樣
4. 按抽樣方法的定義為簡單隨機抽樣
5. (A) 簡單隨機抽樣樣本數不宜過大
   (B) 系統抽樣不宜用於有循環性的母群體
   (D) 部落抽樣使用於各部落間差異小才適合
6. 8000÷40＝200，把 8000 個用戶從 0001 編到 8000，先從 0001 到 0200 中隨機抽出一個號碼，比如說 168，再每間隔 200 個號碼選取 1 個編號，如此得到的號碼 168，368，568，768，968，1168，…，7768，7968 共 40 個用戶樣本，故若第一個用戶是 168，最後一個用戶是 7968
7. 自第 9、10 行選出之二位數為 27，04，17，(73)，(57)，(93)，(75)，22，15，因此，選出之 5 位同學其座號及身高如下表：

座號	4	15	17	22	27
身高	141	172	145	157	155

   則 $\frac{1}{5}(141+172+145+157+155)=154$ 公分
8. $\frac{1}{10}(90+20+60+50+80+30+80+90+100+40)=64$ 分
9. 1800：1200＝3：2，男生、女生的比例為 3：2，因此抽出的樣本中，男生應抽出 $50\times\frac{3}{5}=30$ 位，女生應抽出 $50\times\frac{2}{5}=20$ 位
10. 因為是在高一、二、三中各選取一班，所以為部落抽樣

對應課本各章頁碼

11. 將身高由矮到高順序排列如下：

165，166，167，168，168，168，169，169，169，169，170，171，172，172，174，175，176，176，178，178，178，178，181，182，184

其中小於 170 公分者 10 人，大於或等於 170 公分者 15 人，15：10＝3：2，依比例自小於 170 公分之 10 人中抽出 $5\times\frac{2}{5}=2$ 人，自大於或等於 170 公分之 15 人中抽出 $5\times\frac{3}{5}=3$ 人，均依簡單隨機抽樣抽出

12. ⑴簡單隨機抽樣法
⑵可看成是部落抽樣法（依學業成績高低為部落），也可看成是方便的樣本
⑶方便的樣本

對應課本各章頁碼

3-5 統計資料整理

重點一 資料整理

範例 1- 老師導引 P.132

資料整理的目的為：系統化、簡單化

範例 1- 學生演練 P.132

資料整理的步驟為：

(1) 分類、(2) 歸類、(3) 列表、(4) 繪圖

重點二 圖表的編製

範例 1- 老師導引 P.135

組別	次數	以下累積	以上累積
40 ~ 50	5	5	40
50 ~ 60	4	9	35
60 ~ 70	10	19	31
70 ~ 80	13	32	21
80 ~ 90	6	38	8
90 ~ 100	2	40	2

範例 1- 學生演練 P.135

組別	次數	以下累積	以上累積
30 ~ 40	1	1	40
40 ~ 50	3	4	39
50 ~ 60	11	15	36
60 ~ 70	10	25	25
70 ~ 80	8	33	15
80 ~ 90	5	38	7
90 ~ 100	2	40	2

範例 2- 老師導引 P.136

將原始資料排序後，統計各組次數，即得次數分配表如下：

年齡（歲）	次數
20 ~ 25	9
25 ~ 30	13
30 ~ 35	10
35 ~ 40	3
40 ~ 45	2
45 ~ 50	3

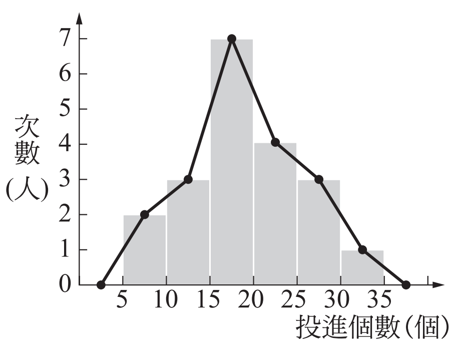
範例 2- 學生演練 P.136

組數 = 10，組距 = 5

最低分為 43 分，因此將第一組的下界定為 40 分，得次數分配表如下：

組別	次數
40 ~ 45	1
45 ~ 50	0
50 ~ 55	5
55 ~ 60	8
60 ~ 65	16
65 ~ 70	16
70 ~ 75	8
75 ~ 80	5
80 ~ 85	0
85 ~ 90	1

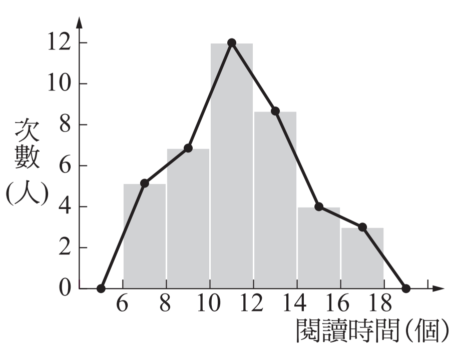
範例 3- 老師導引 P.137



(1) 如圖：為次數分配直方圖

(2) 如圖：將長方形頂點中點連接所成之圖形，為次數分配折線圖

範例 3- 學生演練 P.137



(1) 如圖：為次數分配直方圖

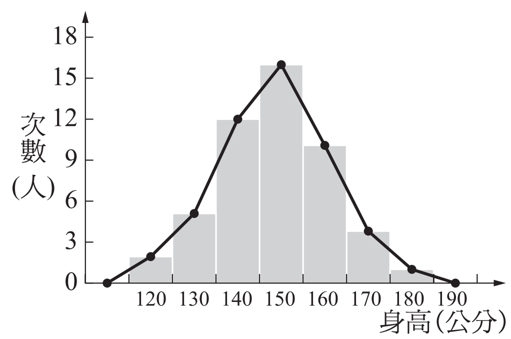
(2) 如圖：將長方形頂點中點連接所成之圖形，為次數分配折線圖

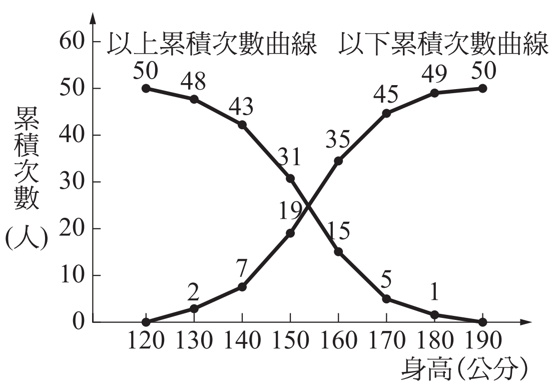
對應課本各章頁碼

範例 4- 老師導引 P.138

先作其累積次數表，再利用表來作圖

身高（公分）	次數（人）	以上累積次數	以下累積次數
120 ～ 130	2	2	50
130 ～ 140	5	7	48
140 ～ 150	12	19	43
150 ～ 160	16	35	31
160 ～ 170	10	45	15
170 ～ 180	4	49	5
180 ～ 190	1	50	1

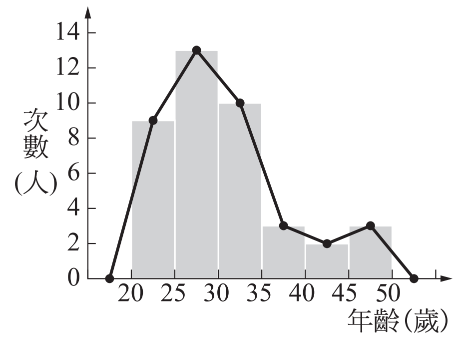


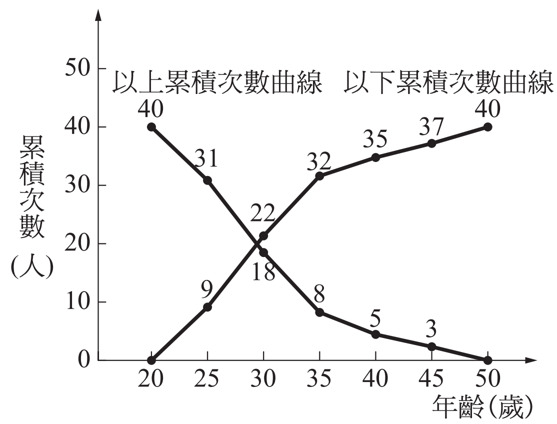


範例 4- 學生演練 P.138

先作其累積次數表，再利用表來作圖

年齡（歲）	次數（人）	以上累積次數	以下累積次數
20 ～ 25	9	9	40
25 ～ 30	13	22	31
30 ～ 35	10	32	18
35 ～ 40	3	35	8
40 ～ 45	2	37	5
45 ～ 50	3	40	3





範例 5- 老師導引 P.139

(1) 由圖知，共 50 人

(2) 由圖知，165 ～ 170 最陡，人數最多
所以有 $35-9=26$（人）

(3) 由圖知，170 公分以上者有
$50-35=15$（人）

範例 5- 學生演練 P.139

(1) 由圖知，60 分以上有 38（人）
故不及格有 $50-38=12$（人）

(2) 由圖知，70 分以上者有 25 人
80 分以上者有 13 人
故 70 ～ 80 分 的有 $25-13=12$（人）

3-5 學習成效驗收 P.140 ～ 142

1. 全距為 $100-30=70$（分）
2. 70 分以上的學生占 $20\%+10\%+5\%=35\%$
   ∴ 70 分以上共有 $40\times35\%=14$（人）
3. (1)∵ 160 公分以下的累積次數為 30
   ∴身高未達 160 公分的有 30 人
   (2)∵ 170 公分以下的累積次數為 45，而全班有 50 人
   ∴身高至少 170 公分的有 $50-45=5$ 人

4. $R=$(最大一組的上限)－(最小一組的下限)
$=180-150=30$（公分）
5. $18-8=10$（人）
6. ∵ 70 分以上的累積次數為 20，且 80 分以上的累積次數為 15
∴ 70 ～ 80 分者有 $20-15=5$（人）
7. $a=2+6=8$，$b=19+8=27$，$c=5+8=13$，$d=13+7=20$
$a+b-c-d=8+27-13-20=2$
8. 數學及格人數有 $7+5+5=17$ 人
國文及格人數有 $3+7+6=16$ 人
所以及格人數較多的為數學科
9. 80 ～ 90 者有 11 人，90 ～ 100 者有 5 人，100 ～ 110 者有 3 人
⇒80 ～ 110 者有 $11+5+3=19$ 人
10. 有 $13+25=38$ 人
11. 成績至少 80 分的人數有 $50-38=12$ 人
占全班人數的百分比為$\frac{12}{50}=\frac{24}{100}=24\%$
12. $a=5+20=25$，$b=a+13=25+13=38$

3-5 實力測驗 P.143 ～ 147

1.(A)	2.(B)	3.(C)	4.(C)	5.(A)
6.(D)	7.(A)	8.(B)	9.(C)	10.(B)
11.(D)	12.(B)	13.(B)	14.(B)	

1. 以下累積次數分配曲線圖為遞增折線圖型
2. $800\div40=200$，把 8000 個用戶從 0001 編到 8000，先從 0001 到 0200 中隨機抽出一個號碼，比如說 168，再每間隔 200 個號碼選取 1 個編號，如此得到的號碼 168，368，568，768，968，1168，…，7768，7968 共 40 個用戶樣本，故若第一個用戶是 168，最後一個用戶是 7968
3. $3+x+16=22$，$x=3$，$y=16+20=36$
$\Rightarrow x+y=39$
4. (A)30 ～ 40 分的有 $6-3=3$ 人
(B)50 ～ 60 分的有 $16-10=6$ 人
(C)70 ～ 80 分的有 $29-25=4$ 人
(D)70 分以上的有 $30-25=5$ 人
5. $50-39=11$ 人
6. $13+9+5+2=29$ 人
7. (A) 存款 2 萬元以上所占的比例為
$20\%+15\%=35\%$
(B)$2.5\times10\%+7.5\times10\%+12.5\times15\%$
$+17.5\times30\%+22.5\times20\%+27.5\times15\%$
$=\frac{1}{100}(25+75+187.5+525+450+412.5)$
$=16.75$（千元）$=16750$ 元
(C) 存款總金額為 16.75 千元$\times500$
$=8375000$ 元
(D) 存款 1 萬元到 1 萬 5 千元的占 15%
8. (A) 中位數人數 25 人與甲乙丙三班成績之交點：丙 28 < 乙 55 < 甲 68
(B) 60 分以上者，丙 5 人 < 乙 20 人 < 甲 30 人
(C) 80 分以上者，丙 0 人 < 甲 12 人 < 乙 15 人
(D) 平均成績，丙恆在甲乙曲線之左，平均最低
9. $12+6+1=19\%$
$300\times19\%=57$ 天
10. (A) 60 ～ 80 分的有 $17+10=27$ 人
(B) 及格的有 $17+10+8=35$ 人
(C) 不及格的有 $1+1+6+7=15$ 人
(D) 80 ～ 90 分的有 8 人
11. (A) 159 ～ 162 公分的有 $4-1=3$ 人
(B) 165 ～ 168 公分的有 $16-7=9$ 人
(C) 171 ～ 174 公分的有 $27-24=3$ 人
(D) 168 ～ 171 公分的有 $24-16=8$ 人
12. 70 分以上的有 $50-30=20$ 人
13. 高於 11 級分的人數百分比約為
$3\%+3.2\%+1\%+1.3\%=8.5\%$
∴人數約為 $120000\times8.5\%=10200$
14. (A) 考試分數在80分以上的有$40-35=5$（人）
(C) 考試分數在 70 分以上的有 $40-32=8$（人）
(D) 考試分數在 50 分以上而不及格的有
$21-12=9$（人）

答案與解析

對應課本各章頁碼

3-6 統計量分析

重點一 算術平均數

範例 1- 老師導引 P.149

$\bar{x}=\frac{1}{6}(160+172+173+180+165+176)$

$=171$（公分）

範例 1- 學生演練 P.149

$\bar{x}=\frac{1}{8}(60+72+73+80+65+76+53+56)$

$=66.875$（公斤）

範例 2- 老師導引 P.149

$\bar{x}=\frac{1}{50}(35\times1+45\times5+55\times10+65\times18$

$+75\times12+85\times4)$

$=64.4$（分）

範例 2- 學生演練 P.149

$\bar{x}=\frac{1}{50}(45\times2+55\times7+65\times13+75\times22$

$+85\times5+95\times1)$

$=69.8$（公斤）

範例 3- 老師導引 P.150

各組距取其組中點

則 $\bar{x}=\frac{1}{50}(45\times6+55\times8+65\times12+75\times13$

$+85\times9+95\times2)$

$=68.4$

範例 3- 學生演練 P.150

各組距取其組中點

則 $\bar{x}=\frac{1}{40}(19000\times6+21000\times8+23000\times18$

$+25000\times5+27000\times3)$

$=22550$（元）

範例 4- 老師導引 P.150

$W=\frac{80\times6+62\times6+64\times6+88\times4+84\times3}{6+6+6+4+3}$

$=73.6$

範例 4- 學生演練 P.150

$W=\frac{75\times6+78\times5+80\times6+92\times2+88\times2+92\times4}{6+5+6+2+2+4}$

$=81.92$

重點二 中位數

範例 1- 老師導引 P.152

(1) 由小到大：4，7，8，10，13，16，18

$\therefore M_e=x_{\frac{7+1}{2}}=x_4=10$

(2) 由小到大：4，7，8，10，11，13，16，18

$\therefore M_e=\frac{1}{2}(x_4+x_5)=\frac{1}{2}(10+11)=10.5$

範例 1- 學生演練 P.152

(1) 由小到大：9，14，17，18，25，28，28，32，40 $\therefore M_e=x_{\frac{9+1}{2}}=x_5=25$

(2) 由小到大：9，14，17，18，25，25，28，28，32，40

$\therefore M_e=\frac{1}{2}(x_5+x_6)=\frac{1}{2}(25+25)=25$

範例 2- 老師導引 P.152

成績	40 ~ 50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90	90 ~ 100
人數	6	8	12	13	9	2
以下累積次數	6	14	26	39	48	50

由表知：中位數 $M_e=x_{25}$ 落在 60 ～ 70 組距內

由內插法：$\frac{Me-60}{70-60}=\frac{\frac{50}{2}-14}{26-14}$

$\Rightarrow Me=60+\frac{11}{12}(70-60)$

$\doteqdot 69.2$

範例 2- 學生演練 P.152

月薪（元）	18000 ～ 20000	20000 ～ 22000	22000 ～ 24000	24000 ～ 26000	26000 ～ 28000
人數	6	8	18	5	3
以下累積次數	6	14	32	37	40

由表知：中位數 $M_e=x_{20}$ 落在 22000 ～ 24000 組距內

由內插法：$\frac{Me-22000}{24000-22000}=\frac{\frac{40}{2}-14}{32-14}$

$\Rightarrow Me=22000+\frac{6}{18}(24000-22000)$

$\doteqdot 22666.7$（元）

對應課本各章頁碼

範例 3- 老師導引 P.153

⑴ 12 出現 3 次，23 出現 3 次為最多

∴眾數 $M_o = 12$，23

⑵ 15 出現 3 次，26 出現 3 次為最多

∴眾數 $M_o = 15$，26

範例 3- 學生演練 P.153

⑴ 67 出現 3 次為最多

∴眾數 $M_o = 67$

⑵ 28 出現 4 次，29 出現 4 次為最多

∴眾數 $M_o = 28$，29

重點三　四分位距

範例 1- 老師導引 P.155

由小到大排列：

2，7，9，13，15，19，20，25，28，30，35

⑴ 全距 $= 35 - 2 = 33$

⑵ 中位數 $M_e = x_{\frac{11+1}{2}} = x_6 = 19$

⑶ 19 前 5 個數之中位數為 $Q_1 = 9$

19 後 5 個數之中位數為 $Q_3 = 28$

∴四分位距 $IQR = Q_3 - Q_1 = 28 - 9 = 19$

範例 1- 學生演練 P.155

由小到大排列：

3，5，7，9，10，13，15，19，20，21，25，28，35，38，44

⑴ 全距 $= 44 - 3 = 41$

⑵ 中位數 $M_e = x_{\frac{15+1}{2}} = x_8 = 19$

⑶ 19 前 7 個數之中位數為 $Q_1 = 9$

19 後 7 個數之中位數為 $Q_3 = 28$

∴四分位距 $IQR = Q_3 - Q_1 = 28 - 9 = 19$

重點四　標準差

範例 1- 老師導引 P.157

平均數 $\overline{x} = \frac{1}{5}(62 + 63 + 65 + 67 + 68) = 65$

母體的變異數

$$\sigma^2 = \frac{1}{5}[(62-65)^2 + (63-65)^2 + (65-65)^2 + (67-65)^2 + (68-65)^2] = 5.2$$

∴母體標準差 $\sigma = \sqrt{5.2} \doteqdot 2.28$

範例 1- 學生演練 P.157

平均數 $\overline{x} = \frac{1}{5}(98 + 102 + 104 + 106 + 110) = 104$

母體的變異數

$$\sigma^2 = \frac{1}{5}[(98-104)^2 + (102-104)^2 + (104-104)^2 + (106-104)^2 + (110-104)^2] = 16$$

∴母體標準差 $\sigma = \sqrt{16} = 4$

範例 2- 老師導引 P.157

平均數 $\overline{x} = \frac{1}{5}(1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 5$

樣本變異數

$$S^2 = \frac{1}{5-1}[(1-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2 + (9-5)^2] = 10$$

∴樣本標準差 $S = \sqrt{10} \doteqdot 3.16$

範例 2- 學生演練 P.157

平均數 $\overline{x} = \frac{1}{5}(9 + 10 + 11 + 12 + 13) = 11$

樣本變異數

$$S^2 = \frac{1}{5-1}[(9-11)^2 + (10-11)^2 + (11-11)^2 + (12-11)^2 + (13-11)^2] = 2.5$$

∴樣本標準差 $S = \sqrt{2.5} \doteqdot 1.58$

範例 3- 老師導引 P.158

⑴ 平均數

$$\overline{x} = \frac{1}{10}(1 \times 3 + 3 \times 5 + 2 \times 7 + 3 \times 9 + 1 \times 11) = 7$$

⑵ $\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 = 1 \times 3^2 + 3 \times 5^2 + 2 \times 7^2 + 3 \times 9^2 + 1 \times 11^2 = 546$

且 $\overline{x} = 7$

∴母體標準差 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^2 - n\overline{x}^2)}$

$= \sqrt{\frac{1}{10}(546 - 10 \times 7^2)}$

$= \sqrt{5.6}$

$\doteqdot 2.37$

對應課本各章頁碼

範例 3- 學生演練 P.158

(1) 算術平均數

$\bar{x}=\frac{1}{20}(20\times 10+5\times 11+6\times 12+5\times 13+2\times 14)$

$=12$

(2) $\sum_{i=1}^{n} f_i\,x_i^2=2\times 10^2+5\times 11^2+6\times 12^2+5\times 13^2+2\times 14^2=2906$

且 $\bar{x}=12$

$\therefore$ 母體標準差 $\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\,x_i^2-n\bar{x}^2\right)}$

$=\sqrt{\frac{1}{20}(2906-20\times 12^2)}$

$=\sqrt{1.3}$

$\fallingdotseq 1.14$

範例 4- 老師導引 P.159

成績	x_i	人數 f_i	x_i-65	$y_i=\frac{x_i-65}{10}$	$f_i y_i$	$f_i\,y_i^2$
40～50	45	2	−20	−2	−4	8
50～60	55	5	−10	−1	−5	5
60～70	65	5	0	0	0	0
70～80	75	4	10	1	4	4
80～90	85	3	20	2	6	12
90～100	95	1	30	3	3	9

(1) $\sum_{i=1}^{6} f_i y_i=-4-5+0+4+6+3=4$

$\Rightarrow \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} f_i y_i=\frac{1}{20}\times 4=0.2$

$\therefore\ \bar{x}=A+h\bar{y}=65+10\times 0.2=67$

(2) $\sum_{i=1}^{6} f_i\,y_i^2=8+5+0+4+12+9=38$

$S_y=\sqrt{\frac{1}{20}[38-20\times(0.2)^2]}=\sqrt{1.86}\fallingdotseq 1.36$

$\Rightarrow S_x=|h|S_y=10\times 1.36=13.6$

範例 4- 學生演練 P.159

成績	x_i	人數 f_i	x_i-65	$y_i=\frac{x_i-65}{10}$	$f_i y_i$	$f_i\,y_i^2$
40～50	45	6	−20	−2	−12	24
50～60	55	8	−10	−1	−8	8
60～70	65	12	0	0	0	0
70～80	75	13	10	1	13	13
80～90	85	9	20	2	18	36
90～100	95	2	30	3	6	18

(1) $\sum_{i=1}^{6} f_i y_i=-12-8+0+13+18+6=17$

$\Rightarrow \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} f_i y_i=\frac{17}{50}$

$\therefore\ \bar{x}=A+h\bar{y}=65+10\times\frac{17}{50}=68.4$

(2) $\sum_{i=1}^{6} f_i\,y_i^2=24+8+0+13+36+18=99$

$S_y=\sqrt{\frac{1}{50}[99-50\times(\frac{17}{50})^2]}=\sqrt{\frac{4661}{2500}}$

$=\frac{\sqrt{4661}}{50}$

$\therefore\ S_x=|h|S_y=10\times\frac{\sqrt{4661}}{50}=\frac{\sqrt{4661}}{5}$

$\fallingdotseq\frac{68.27}{5}\fallingdotseq 13.65$

範例 5- 老師導引 P.160

(1) $y_i=x_i+3$

$\therefore\ \bar{y}=\bar{x}+3=40+3=43$

$S_y=S_x=5$

(2) $y_i=-2x_i$

$\therefore\ \bar{y}=-2\bar{x}=-2(40)=-80$

$S_y=|-2|S_x=|-2|\cdot 5=10$

(3) $y_i=2x_i+3$

$\therefore\ \bar{y}=2\bar{x}+3=2\cdot 40+3=83$

$S_y=2S_x=2\cdot 5=10$

範例 5- 學生演練 P.160

(1) $y_i=x_i-5$

$\therefore\ \bar{y}=\bar{x}-5=50-5=45$

$S_y=S_x=3$

(2) $y_i=3x_i$

$\therefore\ \bar{y}=3\bar{x}=3\times 50=150$

$S_y=3S_x=3\times 3=9$

(3) $y_i=-2x_i+5$

$\therefore\ \bar{y}=-2\bar{x}+5=-2\cdot 50+5=-95$

$S_y=|-2|S_x=2\times 5=6$

範例 6- 老師導引 P.160

設原始分數為 x_i，調整後分數為 $y_i=1.2x_i+5$

$\because\ \bar{x}=58$，$S_x=6$

則 $\bar{y}=1.2\bar{x}+5=1.2\times 58+5=74.6$（分）

$S_y=1.2S_x=1.2\times 6=7.2$（分）

對應課本各章頁碼

範例 6- 學生演練 P.160

設原始分數為 x_i

調整後分數為 $y_i=1.5x_i+9$

$\because \bar{x}=45$，$S_x=8$

則 $\bar{y}=1.5\bar{x}+9=1.5\times 45+9=76.5$（分）

$S_y=1.5S_x=1.5\times 8=12$（分）

重點五　常態分配

範例 1- 老師導引 P.162

$60=50+5$

所以超過 60 分者占$\frac{1}{2}(1-68\%)=16\%$

則及格者約 $2000\times 16\%=320$（人）

範例 1- 學生演練 P.162

$60=68-8$

所以不超過 60 分者占$\frac{1}{2}(1-68\%)=16\%$

即超過 60 分者占 $1-16\%=84\%$

則及格者約 $1000\times 84\%=840$（人）

範例 2- 老師導引 P.162

(1) $[850，900]=[900-50，900+50]$

所以占 68%

(2) $1000=900+2\times 50$

所以占$\frac{1}{2}(1-95\%)=2.5\%$

範例 2- 學生演練 P.162

$\frac{25}{100}=2.5\%=\frac{1}{2}\times 5\%$

所以 $71=55+2\times s$

故標準差 $s=\frac{71-55}{2}=8$（分）

範例 3- 老師導引 P.163

(1) $[110-2\times 10，110+2\times 10]=[90，130]$ 佔 95%

所以低於 90 分者佔$\frac{1}{2}(1-95\%)=2.5\%$

故大約佔 $1200\times 2.5\%=30$（人）

(2) $[100，120]=[110-10，110+10]$ 所以佔 68%

故大約佔 $1200\times 68\%=816$（人）

範例 3- 學生演練 P.163

(1) $[65-5，65+5]=[60，70]$ 佔 68%

所以不及格學生佔$\frac{1}{2}(1-68\%)=16\%$

即不及格學生約 $500\times 16\%=80$（人）

(2) $[55，75]=[65-2\times 5，65+2\times 5]$

所以佔 95%

即學生約有 $500\times 95\%=475$（人）

(3) 70 分以上佔$\frac{1}{2}(1-68\%)=16\%$

即 70 分以上大約有 $500\times 16\%=80$（人）

所以阿哲大約 81 名

3-6　學習成效驗收 P.164 ～ 167

1. 所求$=\frac{80\times5+60\times3+70\times4+85\times2+85\times2}{5+3+4+2+2}$

   $=75$ 分

2. 將這一群數值由小而大排列得 8，9，28，40，46，168，335

   ∵項數 $n=7$ 為奇數，故得中位數 $Me=x_4=40$

3. 令丙班平均為 x

   由$\frac{35\times60+35\times70+30x}{35+35+30}=65.6$

   $\Rightarrow x=67$

4. $\frac{50\times31+55\times34+54\times35}{31+34+35}$

   $=\frac{1550+1870+1890}{100}=\frac{5310}{100}=53.1$

5. $W=\frac{20000\times5+22000\times7+28000\times8}{5+7+8}$

   $=23900$（元）

6. 平均成績$=85\times30\%+90\times30\%+95\times30\%+80\times10\%=89$（分）

7. 眾數為 2 和 4

8. 將七個成績中，最高與最低成績去掉，則剩下的成績為 78，82，83，82，80

   ∴平均成績為

   $\frac{78+82+83+82+80}{5}=81$（分）

9. ∵ 53，60，72，88，95 均大於中位數 47

∴ x 的值介於 36 與 53 之間

將 10 個數據由小而大排列得

8，13，20，36，x，53，60，72，88，95

故得中位數 $Me=\dfrac{x+53}{2}=47\Rightarrow x=41$

10. 將成績由小至大排列得：60，61，66，72，78，79，81，84，85，94

$Q_1=66$，$Q_3=84$

∴四分位距 $IQR=Q_3-Q_1=84-66=18$（分）

11. 原資料算術平均數為：$3\times10+40=70$

標準差為：$1.4\times10=14$

12. 經觀察得 $y_i=x_i+100$

$\Rightarrow\overline{Y}=\overline{X}+100=6+100=106$

13. $\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^{11}x_i}{11}=\dfrac{220}{11}=20$

∴ $S=\sqrt{\dfrac{1}{11-1}(8000-11\times20^2)}$

$=\sqrt{360}=6\sqrt{10}$

14. ∵ $\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{5}\times\sum_{i=1}^{5}x_i^2-\mu^2}$

∴ $4^2=\dfrac{1}{5}\times\sum_{i=1}^{5}x_i^2-6^2\Rightarrow\sum_{i=1}^{5}x_i^2=260$

15. 標準差 $S_{x+3}=S_x=3$

16. 令另一科成績為 x 分

$\Rightarrow x+70+80+80+80+85=6\times80\Rightarrow x=85$

又母群體標準差

$\sigma=\sqrt{\dfrac{(85-80)^2+(70-80)^2+(80-80)^2+(80-80)^2+(80-80)^2+(85-80)^2}{6}}$

$=5$ 分

17. 標準差 $S_{3x}=3S_x=3\times3=9$

18. 設原始成績為 x_i，則調整後為 $y_i=1.5x_i+5$

又已知 $\overline{X}=46\Rightarrow\overline{Y}=1.5\overline{X}+5=1.5\times46+5$

$=74$（分）

19. 調整後的樣本標準差為：

$S_y=0.8S_x=0.8\times1.5=1.2$ 分

20. 依大小排序為：

23、27、39、44、48、52、59、61、77

全距：$77-23=54$

四分位距 $IQR=Q_3-Q_1=\dfrac{59+61}{2}-\dfrac{27+39}{2}$

$=60-33=27$

21. $Q_1=\dfrac{50+x}{2}$，$Q_3=\dfrac{72+76}{2}=74$

$IQR=Q_3-Q_1=74-\dfrac{50+x}{2}=18\Rightarrow x=62$

22. 樣本平均數 $\overline{X}=\dfrac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}x_i=\dfrac{1}{16}\times160=10$

樣本標準差 $S=\sqrt{\dfrac{1}{16-1}(\sum_{i=1}^{16}x_i^2-16\overline{X}^2)}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{15}(1660-16\times10^2)}=\sqrt{4}=2$

23. ∵英文科的成績集中在平均成績左右

∴其標準差較小

24. 由算術平均數的線性公式知

$\overline{Y}=-4\overline{X}+2=(-4)\times10.5+2=-40$

由樣本標準差的線性公式知

$S_y=|-4|S_x=4\times1.2=4.8$

25. ∵ $\overline{X}=\dfrac{1}{5}(4+4+8+12+12)=8$

∴ $S=\sqrt{\dfrac{1}{5-1}[(4-8)^2+(4-8)^2+(8-8)^2+(12-8)^2+(12-8)^2]}$

$=4$

26. 設一組數值資料 X 為 x_1，x_2，x_3，…，x_{10}

另一組數值資料 Y 為

$y_1=20x_1-3$，$y_2=20x_2-3$，$y_3=20x_3-3$，…

$y_{10}=20x_{10}-3$

則 $y_i=ax_i+b$，$i=1$，2，…，10，

$a=20$，$b=-3$

由樣本標準差的線性公式知 $S_y=|a|S_x=20S$

27. 令加分前為 x_i 分，加分後為 y_i 分

得 $y_i=x_i+8\Rightarrow\overline{Y}=\overline{X}+8$

∴算術平均數會改變

28. ∵ $y=ax+b$

∴ $\begin{cases}81=50\times a+b\\15=6\times|a|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{5}{2}\\b=-44\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-\dfrac{5}{2}\\b=206\end{cases}$

∴ $(a,b)=(\dfrac{5}{2},-44)$ 或 $(-\dfrac{5}{2},206)$

29. 全距 $=3.1-2.1=1$ 千元

30. (1)∵ $\dfrac{64-68}{4}=-1$，$\dfrac{72-68}{4}=1$

∴有 $500\times68\%=340$（人）

(2)∵ $\dfrac{60-68}{4}=-2$，

∴有 $500\times(1-\dfrac{5\%}{2})=487.5\fallingdotseq488$（人）

31. (1) $\because \dfrac{60-65}{5}=-1$，

$\therefore 600\times(\dfrac{1-68\%}{2})=96$（人）

(2) $\because \dfrac{75-65}{5}=2$，

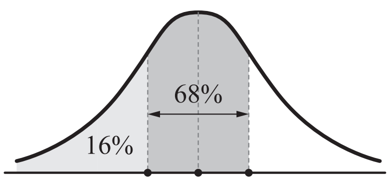
$\therefore 600\times(\dfrac{1-95\%}{2})=15$（人）

(3) $\because \dfrac{70-65}{5}=1$，

∴超過 70 分的有 $600\times(\dfrac{1-68\%}{2})=96$ 人

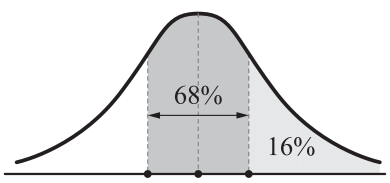
故她大約排第 96 名

32.



約有 $1000\times16\%=160$（人）

33.

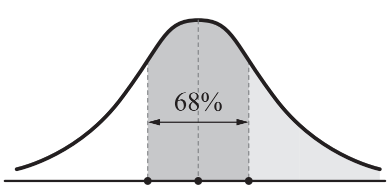


∵ 70 分以上者約占 16%

⇒約有 $1000\times16\%=160$（人）

∴ 70 分約排在第 160 名

34. $\mu=160$，$\sigma=4$



$156=\mu-\sigma$

$68\%\times\dfrac{1}{2}+50\%=84\%$

$3000\times84\%=2520$（人）

3-6 實力測驗 P.168 ～ 176

1.(D)	2.(B)	3.(D)	4.(D)	5.(C)
6.(C)	7.(B)	8.(D)	9.(A)	10.(B)
11.(D)	12.(B)	13.(C)	14.(B)	15.(A)
16.(D)	17.(A)	18.(A)	19.(C)	20.(D)
21.(C)	22.(C)	23.(A)	24.(B)	25.(B)
26.(D)	27.(A)	28.(C)	29.(D)	30.(D)
31.(D)	32.(A)	33.(A)	34.(B)	35.(B)
36.(C)	37.(D)	38.(C)	39.(A)	40.(C)
41.(C)	42.(B)	43.(D)		

1. $\dfrac{1}{12}(23000\times3+35000\times4+47000\times4$
$+59000\times1)=38000$ 元

2. 去掉差距較大的最高分 5.9 分與最低分 4.6 分，而以其餘 6 個分數計算之，得
$\dfrac{5.5\times1+4.9\times1+5.3\times1+5.1\times1+4.6\times0+5.2\times1+5.4\times1+5.9\times0}{6}$
$\fallingdotseq 5.23$ 分

3. $\dfrac{1}{50}(147.5\times2+152.5\times13+157.5\times16+162.5$
$\times16+167.5\times2+172.5\times1)=158.1$

4.

組限	組中點	次數
30 ～ 40	35	4
40 ～ 50	45	$10-4=6$
50 ～ 60	55	$18-10=8$
60 ～ 70	65	$32-18=14$
70 ～ 80	75	$42-32=10$
80 ～ 90	85	$48-42=6$
90 ～ 100	95	$50-48=2$

算術平均數為

$\dfrac{1}{50}(35\times4+45\times6+55\times8+65\times14+75\times10$
$+85\times6+95\times2)=64.2$

5. $\dfrac{50\times4+78\times5+80\times3}{4+5+3}=69.2$ 分

6. 某生平時考平均值$=\dfrac{85+82+73}{3}=80$

故該生學期總成績

$=80\times0.3+86\times0.2+79\times0.2+90\times0.3=84$

7. 中位數出現在第 10 位和第 11 位中間

成績	50	60	70	80	90
次數（人）	2	3	6	7	2
累積次數	2	5	11	18	20

∴中位數為 70 分

8. 由小而大排序為 3，15，15，16，16，17，17，17，18，18，18，19，19，共 13 個，正中間為第 7 個，故而中位數為 17

9. $\dfrac{a+b+c+d+e}{5}=40$

$\therefore\ a+b+c+d+e=200$，故平均數為

$\dfrac{1}{5}[(5a-2)+(5b-2)+(5c-2)+(5d-2)+(5e-2)]$

$=\dfrac{1}{5}[5(a+b+c+d+e)-10]=\dfrac{1}{5}(5\times200-10)$

$=198$

10. (A) 組距為 10 分
(B) 全距是 $100-10=90$ 分
(C) 50 ～ 60 分這一組的以下累積次數是 $0+1+2+2+3+4=12$ 人
(D) 一共有 $1+2+2+3+4+11+17+8+2=50$ 人
中位數應在第 25、26 位之間，而 70 分以下的人數有 $0+1+2+2+3+4+11=23$ 人
故第 25、26 位落在 70 ～ 80 分這一組內

11. 將各組的次數及以下累積次數分配表列出如下：

組限（分）	次數	以下累積次數
30 ～ 40	5	5
40 ～ 50	10	15
50 ～ 60	25	40
60 ～ 70	25	65 ← Me
70 ～ 80	20	85
80 ～ 90	10	95
90 ～ 100	5	100

數據共有 100 筆，所以中位數為第 50 與第 51 個數值的算術平均數，由表知這兩個數值落在 60 ～ 70 這一組中，且為該組中的第 $50-40=10$ 及 $51-40=11$ 個數值

第 10 個為

$60+(10-1)(\dfrac{70-60}{25})=63.6$

第 11 個為

$60+(11-1)(\dfrac{70-60}{25})=64$

故中位數為 $\dfrac{63.6+64}{2}=63.8$ 分

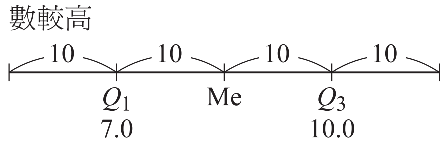
12. 令期末考必須考 x 分
平時考平均為 $\dfrac{54+30+66+50}{4}=50$
由 $50\times30\%+60\times30\%+x\times40\%=60$ 知
$15+18+0.4x=60$，解得 $x=67.5$

13. 因 21 個數值之算術平均數為 55，所以此 21 個數值的總和為 $55\times21=1155$
今剔除 60，所餘 20 個數值的總和為
$1155-60=1095$
故所餘 20 個數值的算術平均數為
$\dfrac{1095}{20}=54.75$

14. 此一組資料為 11，13，15，⋯，187，共 89 個數值，正中間為第 $\dfrac{89+1}{2}=45$ 個，故中位數為 $\text{Me}=11+2(45-1)=99$

15. 眾數落在 2 ～ 4 小時這一組，有 17 人，故眾數 ≤4；中位數落在 4 ～ 6 小時這一組，有 14 人，故中位數 ≥4
算術平均數
$=\dfrac{1\times1+17\times3+14\times5+6\times7+2\times9}{40}=4.55$
每週上網 6 小時以上的共有 $6+2=8$ 人
占全班人數 $\dfrac{8}{40}\times100\%=20\%$

16. (A) 兩班均為 48 人
(B) $\dfrac{48}{2}=24$，縱軸 24 對應圖形中乙班中位數成績在甲班成績的右方，故乙班中位數較高



(C) 乙班及格人數為 $48-5=43$ 人
甲班及格人數由圖看出為 37 人
故乙班及格人數較多
(D) 乙班 70 ～ 80 分的有 $30-9=21$ 人
甲班 70 ～ 80 分的有 $25-9=16$ 人
故乙班所占的比例較高

17. (A) $Q.D.=Q_3-Q_1=10-7=3$
(B) $Q_1\le\text{Me}\le Q_3$　$\therefore\ 7.0\le$ 中位數 ≤10
(C) Q_3 表示在總人數 $\dfrac{3m}{4}$ 的位置
∴有 10 個學生超過 10hrs
(D) 約有 $10+10=20$ 名學生使用 7 ～ 10hrs

18. 列表如下：

分數	組中點 (x_i)	以下累積次數	次數 f_i
30～40	35	5	5
40～50	45	15	10
50～60	55	40	25
60～70	65	65	25
70～80	75	85	20
80～90	85	95	10
90～100	95	100	5

故算術平均數為 $\frac{1}{100}(35\times5+45\times10+55\times25$
$+65\times25+75\times20+85\times10+95\times5)$
$=\frac{1}{100}(175+450+1375+1625+1500+850+475)$
$=\frac{1}{100}\times6450=64.5$

19. 先將資料由小到大排列：
3，4，12，12，13，15，17，20
$\Rightarrow Q_1=\frac{4+12}{2}=8$，$Q_3=\frac{15+17}{2}=16$
$\therefore$四分位距為 $16-8=8$

20. 資料由小而大 26，26，41，41，43，43，44，48，48，52，55，63，67，78
$Q_1=41$，$Q_3=55$
$\therefore Q_3-Q_1=14$

21. 先將資料由小到大排列：
10，11，12，15，15，17，21，23，26，28
$\Rightarrow Q_1=12$，$Q_3=23$
$\therefore$四分位距為 $23-12=11$

22. 把班上 12 位同學的罰球次數排序如下：

排序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
次數	1	2	3	3	3	3	4	5	6	6	7	8

↑ Q_1 ↑ Me ↑ Q_3

$Q_1=\frac{3+3}{2}=3$，$Q_3=\frac{6+6}{2}=6$
故 $Q.D.=Q_3-Q_1=6-3=3$

23. (1) $\bar{x}=\frac{3\times8+4\times15+5\times11+6\times3+7\times1+8\times2}{40}$
$=4.5$
(2)先將資料全部平移 5
$S^2=\frac{1}{39}\times[8(-2)^2+15\times(-1)^2+11\times0^2$
$+3\times1^2+1\times2^2+2\times3^2]-\frac{49}{39}\times(\frac{1}{2})^2$
$=\frac{62}{39}$

24. 甲的每一科分數均比乙多 10 分
$\therefore S_{甲}=S_{乙}$
甲的每一科分數 80％丙
$\therefore S_{甲}=S_{乙}>S_{丙}$

25.

組別	人數	以下累積
25～35	4	4
35～45	10	14
45～55	7	21
55～65	11	32
65～75	7	39
75～85	6	45
85～95	5	50

(1) $\overline{X}=\frac{30\times4+40\times10+50\times7+60\times11+70\times7+80\times6+90\times5}{50}$
$=59$
(2) $R=95-25=70$
(3) Me 在（55～65）這一組
$\therefore\frac{\text{Me}-55}{65-55}=\frac{25-21}{32-21}\Rightarrow\text{Me}=58.6$

55　Me　65
21　25　32

(4) $S=\sqrt{\frac{189900}{50}-59^2}=\sqrt{317}$

26. 由 $\bar{x}=\frac{1}{11}(2+4+4+5+5+6+7+8+11$
$+x+y)=6$
$\Rightarrow 52+x+y=66\Rightarrow x+y=14$
又由中位數 6 知 6 放在正中央：
2，4，4，5，5，，7，8，11，x，y
x，y 大於或等於 6，在 6 的右半群中，上述排列尚未依大小順序

再由 $\begin{cases}x+y=14\\x\geq6\\y\geq6\\x<y\end{cases}$ 知

x	6
y	8
$x+y=14$	

故 $x=6$，$y=8$
故
$S=\sqrt{\frac{1}{11}[(2-6)^2+(4-6)^2+(4-6)^2+(5-6)^2+(5-6)^2+(6-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2+(8-6)^2+(8-6)^2+(11-6)^2]}$
$=\sqrt{\frac{1}{11}(16+4+4+1+1+0+0+1+4+4+25)}$
$=\sqrt{\frac{60}{11}}\fallingdotseq2.34$

對應課本各章頁碼

27. A 組的全距與 E 組的全距均為 9，又 A 組的量分布於兩端，故 A 組的標準差最大

28. 令第六科成績為 x

則 $(x+68+80+80+80+86)\div 6=80$，

解出 $x=86$

$\therefore S=\sqrt{\frac{1}{6}[(86-80)^2+(68-80)^2+(80-80)^2+(80-80)^2+(80-80)^2+(86-80)^2]}$

$=\sqrt{\frac{1}{6}(36+144+0+0+0+36)}=\sqrt{36}=6$

29. 因 $S=2$ $\therefore S(2x-1)=2S(x)=2\times 2=4$

30. 因 $Y=\frac{12(X-\overline{X})}{S_X}+40=\frac{12}{S_X}X+\left(\frac{(-12)\overline{X}}{S_X}+40\right)$

故由 $\overline{Y}=a\overline{X}+b$ 知

$\overline{Y}=\frac{12}{S_X}\overline{X}+\left(-\frac{(-12)\overline{X}}{S_X}+40\right)=40$

又 $S_Y=\left|\frac{12}{S_X}\right|S_X=\frac{12}{|S_X|}S_X=\frac{12}{S_X}S_X=12$

31. $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_ix_i=\frac{1}{36}(2\times 1+3\times 2+4\times 3+5\times 4+6\times 5+7\times 6+8\times 5+9\times 4+10\times 3+11\times 2+12\times 1)=7$

$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\overline{X})^2$

$=\frac{1}{35}(1\times 5^2+2\times 4^2+3\times 3^2+4\times 2^2+5\times 1^2+4\times 2^2+5\times 1^2+4\times 2^2+3\times 3^2+2\times 4^2+1\times 5^2)=6$

$\therefore$標準差 $S=\sqrt{6}\fallingdotseq 2.4$

32. 原總分 $=40\times 51=2040$

扣除阿猜之 40 分後平均 $=\frac{2040-40}{40}=50$

原 $S=2=\sqrt{\frac{1}{40}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-51^2}$

$40\times(4+51^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2=104200$

扣除阿猜之 40 分後新的

$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=104200-1600=102600$

新 $S=\sqrt{\frac{1}{40}\times 102600-50^2}=\sqrt{65}$

33. 由 $Y=\frac{1}{4}X-1$

及由 $S_{aX+b}=|a|S_X$ 知

$S_Y=S_{\frac{1}{4}X-1}=\frac{1}{4}S_X=\frac{1}{4}(2.19)$

$\doteq 0.55$

34. $\therefore y=-5x+2$ $S_y=S_{-5x+2}=|-5|S_x=5(7)=35$

35. ⑴由 $X=3Y+4$ 知 $Y=\frac{X-4}{3}=\frac{1}{3}X-\frac{4}{3}$

所以 $\overline{Y}=\frac{1}{3}\overline{X}-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}\times 15-\frac{4}{3}=\frac{11}{3}$

⑵另由 $S_{ax+b}=|a|S_x$ 知

$S_Y=S_{\frac{1}{3}X-\frac{4}{3}}=\frac{1}{3}S_X=\frac{1}{3}\times 3=1$

36. 又 $\overline{x}=\frac{1}{8}(1+2+4+5+5+6+8+10)=5.125$

$\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}x_i^2=\frac{1}{8}(1^2+2^2+4^2+5^2+5^2+6^2+8^2+10^2)$

$=33.875$

$S=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\overline{x}^2}=\sqrt{33.875-5.125^2}$

$=\sqrt{7.6094}\fallingdotseq 2.76$

37. 資料愈分散、標準差愈大，由圖很容易發現 (D) 的資料最分散，故其標準差最大

38. (A) 右偏 (B) 左偏 (C) 近似常態 (D) 右偏 (E) 雙峰

39. 在 $[64-3\times 8，64+3\times 8]$，即 $[40，88]$ 內約有 $6000\times 99.7\%=5982$（人）

故 $x=(6000-5982)\div 2=9$，所以 x 最接近 9

40. 在 $[70-10，70+10]$，即 $[60，80]$ 內約有 $2000\times 68\%=1360$（人）

在 $[70-30，70+30]$，即 $[40，100]$ 內約有 $2000\times 99.7\%=1994$（人）

故 $x=(1994-1360)\div 2=317$，所以 x 最接近 320

41. 在 $[70-10，70+10]$，即 $[60，80]$ 內約有 $1500\times 68\%=1020$（人）

故數學成績低於 60 分的人數約為

$(1500-1020)\div 2=240$（人）

42. 於常態分配落在 $[\overline{x}-s，\overline{x}+s]$ 中的有 68%，60 ～ 70.48 分間的人數約有

$1000\times 68\%=680$（人）

$\Rightarrow$低於 60 分的約有 $(1000-680)\div 2=160$（人）

43. 在 $[50-10，50+10]$，即 $[40，60]$ 內約有 $1000\times 68\%=680$（人）

低於 40 分有 $(1000-680)\div 2=160$（人）

在 $[50-30，50+30]$，即 $[20，80]$ 內約有 $1000\times 99.7\%=997$（人）

高於 80 分有 $(1000-997)\div 2=1.5$（人）

則 40 ～ 80 分的約有 $1000-160-1.5=838.5$

故約 840 人

答案與解析

對應課本各章頁碼

Chapter 3 歷屆試題 P.177 ～ 187

1.(D)	2.(D)	3.(D)	4.(B)	5.(C)
6.(D)	7.(B)	8.(D)	9.(C)	10.(D)
11.(D)	12.(B)	13.(C)	14.(B)	15.(B)
16.(A)	17.(B)	18.(A)	19.(A)	20.(D)
21.(A)	22.(C)	23.(A)	24.(B)	25.(A)
26.(B)	27.(B)	28.(C)	29.(D)	30.(B)
31.(C)	32.(A)	33.(D)	34.(D)	35.(B)
36.(C)	37.(D)	38.(D)	39.(C)	40.(C)
41.(B)	42.(D)	43.(A)	44.(D)	45.(A)
46.(D)	47.(B)	48.(D)	49.(B)	50.(A)
51.(B)	52.(D)	53.(C)	54.(A)	55.(B)
56.(B)	57.(D)	58.(D)	59.(A)	60.(B)
61.(B)	62.(C)	63.(D)	64.(D)	65.(D)
66.(C)	67.(A)	68.(D)	69.(A)	70.(A)
71.(B)	72.(B)	73.(C)		

1. ∵每次投擲十元硬幣，都有正面或反面兩種可能

   ∴由乘法原理知，

   連續投擲十元硬幣四次的樣本空間個數為 $2\times2\times2\times2=16$（個）

2. $A=\{a,b,c,d\}\Rightarrow n(A)=4\Rightarrow p=2^4=16$

   $B=\{x,y,z\}\Rightarrow n(B)=3\Rightarrow q=2^3=8$

   $\therefore\ p-q=16-8=8$

3. 設喝豆漿的事件為 A，喝牛奶的事件為 B

   則由題意知 $n(A)=18$，$n(B)=7$，$n(A\cap B)=2$

   $\Rightarrow n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

   $=18+7-2=23$

   ∴都沒喝的人有 $33-23=10$ 人

4. ∵ $1000\div7=142\cdots6$ ∴ 7 的倍數有 142 個

   又∵ $1000\div11=90\cdots10$ ∴ 11 的倍數有 90 個

   且 7 與 11 的最小公倍數為 77

   ∵ $1000\div77=12\cdots76$ ∴ 77 的倍數有 12 個

   ⇒7 或 11 的倍數共有：$142+90-12=220$ 個

5. ∵甲、乙兩人投籃互不影響，故為獨立事件

   設 A 表甲命中的事件、B 表乙命中的事件，

   則 $P(A)=\dfrac{1}{4}$、$P(B)=\dfrac{2}{3}$

   ∴甲、乙至少有一人投進的機率為

   $P(A\cup B)=1-P(A'\cap B')=1-P(A')\times P(B')$

   $=1-(1-\dfrac{1}{4})\times(1-\dfrac{2}{3})=\dfrac{3}{4}$

6. 同時擲 5 枚均勻硬幣一次，樣本空間為 S，

   則 $n(S)=2^5=32$

   設 A_0、A_1 分別表示無正面出現、恰出現 1 枚正面的事件，則

   $n(A_0)=1$、$n(A_1)=C_1^5=5$

   ∴ p（至少有 2 枚出現正面的機率）

   $=1-$（無正面出現的機率）$-$（恰出現 1 面正面的機率）

   $=1-\dfrac{1}{32}-\dfrac{5}{32}=\dfrac{26}{32}=\dfrac{13}{16}$

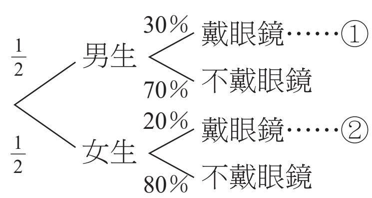
7. 設投擲兩枚公正骰子的樣本空間為 S，則

   $n(S)=6\times6=36$ 出現點數和為 7 的事件

   $A=\{(1,6)，(2,5)，(3,4)，(4,3)，(5,2)，(6,1)\}$

   $\Rightarrow n(A)=6$

   ∴所求機率 $P(A)=\dfrac{6}{36}$

8. 

   由上面樹狀圖所示：

   從該班戴眼鏡的學生中任意抽取一人，此人為男生的機率，相當於樹狀圖中①、②的事件已發生，而出現在①的機率

   所求機率 $P=\dfrac{\dfrac{1}{2}\times30\%}{\dfrac{1}{2}\times30\%+\dfrac{1}{2}\times20\%}=\dfrac{3}{5}$

9. 設 S 為由 20 張卡片抽出兩張卡片的樣本空間

   $\Rightarrow n(S)=C_2^{20}=\dfrac{20\times19}{1\times2}=190$

   又 A 表示兩張卡片數字相加等於 13 的事件，共有 $1+12$，$2+11$，$3+10$，$4+9$，$5+8$，$6+7$ 等 6 種

   （$1+12$ 表示兩張卡片數字分別為 1 與 12）

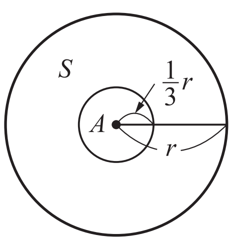
   $\Rightarrow n(A)=6$

   ∴所求機率 $P(A)=\dfrac{6}{190}=\dfrac{3}{95}$

對應課本各章頁碼

10. ∵每張樂透可圈選 6 個相異號碼
又購買兩張號碼均相異，共可圈選 12 個相異號碼，全部情形有 C_{12}^{42} 種，而 12 個號碼中，恰有 2 個為中獎號碼，其情形有 $C_2^6 \times C_{10}^{36}$ 種
∴所求機率 $P=\dfrac{C_2^6 \times C_{10}^{36}}{C_{12}^{42}}$

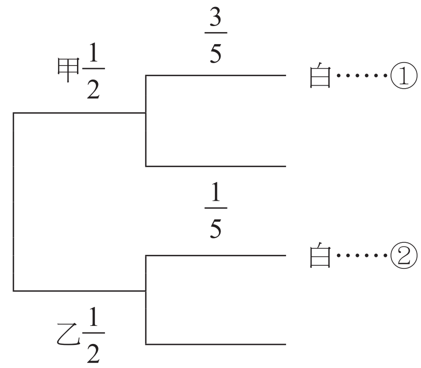
11. 設圓半徑為 r，樣本空間為 S，則：
$m(S)=\pi r^2$（即圓面積）
又圓內部的點至圓心的距離小於至圓周的距離之 $\dfrac{1}{2}$ 倍的事件為 A，則滿足 A 事件的點，在以 $\dfrac{1}{3}r$ 為半徑之圓的內部
即 $m(A)=\pi(\dfrac{1}{3}r)^2=\dfrac{1}{9}\pi r^2$
∴所求機率 $P(A)=\dfrac{m(A)}{m(S)}=\dfrac{\frac{1}{9}\pi r^2}{\pi r^2}=\dfrac{1}{9}$



12. 設樣本空間為 S，又 A 表示兩個骰子出現相同點數的事件，則 $n(S)=6\times6=36$
又 $A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$
$\Rightarrow n(A)=6$
∴所求機率 $P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

13. 設 A 表示只投擲該枚不公正的硬幣一次時出現正面的事件
設 B 表示擲一枚公正硬幣一次出現的事件
由題意知：$P(A\cap B)=\log3$
且 A、B 為獨立事件，
則 $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$
$\Rightarrow \log3=P(A)\times\dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow P(A)=\dfrac{\log3}{\frac{1}{2}}=2\log3$
故所求機率為 $2\log3$

14.



由樹狀圖知：
取出為白球的情形有①②兩種
故取出為白球的機率為
$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

15. 設 S 為樣本空間，A 為點數和等於 6 的事件，
則 $n(S)=6\times6=36$
$A=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$
$\Rightarrow n(A)=5$
∴ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{5}{36}$

16. 設樣本空間為 S
A 為甲乙二人同時被選出參賽之事件
則 $n(S)=C_3^{10}=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$
且 $n(A)=C_2^2\times C_1^8=8$（甲乙必選 C_2^2，剩下 8 人再選 1 人 C_1^8）
故所求機率 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{8}{120}=\dfrac{1}{15}$

17. 設樣本空間為 S，且 $b-a\geq3$ 之事件為 A，
則 $n(S)=6\times6=36$，且
$A=\{(1,4),(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,6)\}$
$\Rightarrow n(A)=6$
∴ $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

18. 設樣本空間為 S，三次投擲中至少有二次擲出 6 點的事件為 A，則

$$n(S)=\underset{\boxed{6}}{1}\times\underset{\boxed{1\sim6}}{6}\times\underset{\boxed{1\sim6}}{6}=36$$

$$n(A)=\underset{\boxed{6}}{1}\times\underset{\boxed{6}}{1}\times\underset{\boxed{1\sim5}}{5}+\underset{\boxed{6}}{1}\times\underset{\boxed{1\sim5}}{5}\times\underset{\boxed{6}}{1}+\underset{\boxed{6}}{1}\times\underset{\boxed{6}}{1}\times\underset{\boxed{6}}{1}=11$$

故所求機率 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{11}{36}$

19. $P=\dfrac{\overset{3\text{紅球}}{C_3^4}+\overset{3\text{白球}}{C_3^3}}{C_3^9}=\dfrac{4+1}{84}=\dfrac{5}{84}$

20. 兩次取球結果為不同顏色可分為：
⑴先取紅球，再取白球：
機率為$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{25}$
⑵先取白球，再取紅球：
機率為$\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{6}{25}$
故所求機率為$\dfrac{6}{25}+\dfrac{6}{25}=\dfrac{12}{25}=0.48$

21. 樣本空間中所有可能發生的事件可區分為
$a>b$，$a=b$，$a<b$ 三種，設其機率分別為
P_1，P_2，P_3，其中 $P_2>0$ 且 $P_1=P_3$
（$\because$ $a>b$ 事件與 $a<b$ 事件的個數相等）
又 $P_1+P_2+P_3=1$
$\Rightarrow P_1+P_3=1-P_2$
$\Rightarrow 2P_1=1-P_2$（$\because$ $P_1=P_3$）
$\Rightarrow P_1=\dfrac{1}{2}(1-P_2)<\dfrac{1}{2}$（$\because$ $P_2>0$）
$\therefore$ $P(a>b)<\dfrac{1}{2}=0.5$
即 $P<0.5$

22. $n(S)=6\times6=36$
$n(A)=n$（點數和小於 5）
$=n$（點數和為 2 或 3 或 4）$=6$
（$\because$點數和為 2 有 $(1,1)$ 一種，點數和為 3 有 $(1,2)$，$(2,1)$ 兩種，點數和為 4 有 $(1,3)$，$(2,2)$，$(3,1)$ 三種，$\therefore$共有 $1+2+3=6$ 種）
$\therefore$ $P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

23. 機率$=\dfrac{C_3^5}{C_3^9}=\dfrac{10}{84}=\dfrac{5}{42}$

24. 2 個數相乘結果為正數，有兩種可能：
正數×正數或負數×負數
$\therefore$ $p=\dfrac{C_2^7+C_2^5}{C_2^{12}}=\dfrac{31}{66}\fallingdotseq 0.47$
$\Rightarrow\dfrac{1}{4}<p<\dfrac{1}{2}$

25. $P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')$
$\Rightarrow\dfrac{2}{5}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-P(A'\cap B')\Rightarrow P(A'\cap B')=\dfrac{1}{20}$
$\Rightarrow P[(A\cup B)']=\dfrac{1}{20}\Rightarrow 1-P(A\cup B)=\dfrac{1}{20}$
$\Rightarrow P(A\cap B)=\dfrac{19}{20}$

26. 設小蕙穿紅衣參加晚會機率為 $P(A)$
則小蕙不穿紅衣參加晚會機率為 $P(A')$
設小玲穿紅衣參加晚會機率為 $P(B)$
則小玲不穿紅衣參加晚會機率為 $P(B')$
$\because$ A、B 為獨立事件，則
A'、B 及 A、B' 及 A'、B' 皆互為獨立事件
$\therefore$ P（恰一人紅色衣服）
$=P(A\cap B')+P(A'\cap B)$
$=P(A)\times P(B')+P(A')\times P(B)$
$=0.4\times0.5+0.6\times0.5$
$=0.2+0.3=0.5$

27. 抽出結果只有一個紅球可分為
（紅,白,白），（白,紅,白），（白,白,紅）
三種情形
所求機率 $P=\dfrac{4}{10}\times\dfrac{6}{9}\times\dfrac{5}{8}+\dfrac{6}{10}\times\dfrac{4}{9}\times\dfrac{5}{8}+\dfrac{6}{10}\times\dfrac{5}{9}\times\dfrac{4}{8}=\dfrac{3\times4\times6\times5}{10\times9\times8}=\dfrac{1}{2}=0.5$
故選 (B)

28. 兩粒骰子擲出點數 a 點、b 點記為序對 (a,b)
$\{(a,b)|a+b=5$ 或 $a+b=10\}=\{(4,1),(3,2),(2,3),(1,4),(6,4),(5,5),(4,6)\}$
$\Rightarrow$7 種
樣本空間 $n(S)=6\times6=36$
$\therefore$所求$=\dfrac{7}{36}$
【另解】

點數和	5	10
個數	4	3

故所求 $P=\dfrac{4+3}{6\times6}=\dfrac{7}{36}$

29. 【方法一】
小王及小洋上壘為獨立事件
若 P(小王)$=0.425$ 表示小王上壘機率
P(小洋)$=0.385$ 表示小洋上壘機率
小王及小洋皆上壘機率$=P$(小王 ∩ 小洋)
$\overset{\text{因為獨立}}{=}$ P(小王)$\times P$(小洋)$=0.425\times0.385$
$=0.163625<0.4$
故選 (D)
【方法二】
承方法一，所求P(小王 ∩ 小洋)$<P$(小洋)
$=0.385<0.4$，故選 (D)

30. 所求分兩步驟：

第一步：先計算自 5 人取出 2 人得到自己的禮物之方法數 $=C_2^5$

第二步：考慮另外三人皆要確實交換到別人禮物之方法數

A	B	C
B	C	A

及

A	B	C
C	A	B

兩種

共 $C_2^5\times 2=20$ 種

所求機率 $=\dfrac{20}{5!}=\dfrac{20}{120}=\dfrac{1}{6}$

故選 (B)

31.

第一天遲到 $\xrightarrow{\frac{3}{4}}$ 第二天準時 → 第三天準時；$\xrightarrow{\frac{2}{5}}$ 第三天遲到…①

第一天遲到 $\xrightarrow{\frac{1}{4}}$ 第二天遲到 → 第三天準時；$\xrightarrow{\frac{1}{4}}$ 第三天遲到…②

所求為①+②兩種情況

即 $\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{6}{20}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{29}{80}$

故選 (C)

32. $1\to 7\to 13\to 19\to 25\to 31\to 37$

$2\to 8\to 14\to 20\to 26\to 32\to 38$

$3\to 9\to 15\to 21\to 27\to 33\to 39$

$4\to 10\to 16\to 22\to 28\to 34\to 40$

$5\to 11\to 17\to 23\to 29\to 35\to 41\to 1$

$6\to 12\to 18\to 24\to 30\to 39\to 42\to 2$

1 ～ 6 中，抽中 2、6 均有 2 號，故

$P=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

33. 獨立事件：

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.5\times 0.8=0.4$

34. 素 → 素 0.8；素 → 葷 0.2　　葷 → 素 0.5；葷 → 葷 0.5

二　三　四

葷 → 素 → 素　$\to 0.5\times 0.8=0.4$

葷 → 葷 → 素　$\to 0.5\times 0.5=0.25$

加 $\Rightarrow 0.65$

35. 設 A 表示二粒骰子點數相同的事件，則

$P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，又 $P(A')=1-P(A)=\dfrac{5}{6}$

∴所得金額的期望值

$E=\dfrac{1}{6}\times 220+\dfrac{5}{6}\times(-50)=-5$（元）

36. 由 3 枚 50 元硬幣及 7 枚 10 元硬幣的袋中，任取 1 枚硬幣所得金額的期望值為

$E(x)=50\times\dfrac{3}{10}+10\times\dfrac{7}{10}=22$（元）

∴由袋中同時任取 2 枚硬幣所得金額的期望值為 $E(2x)=2\times E(x)=2\times 22=44$（元）

37. $E=p_1m_1+p_2m_2+p_3m_3$

$=\dfrac{C_1^4\times C_2^6}{C_3^{10}}\times 10+\dfrac{C_2^4\times C_1^6}{C_3^{10}}\times 20+\dfrac{C_3^4\times C_0^6}{C_3^{10}}\times 30$

$=\dfrac{60}{12}+\dfrac{72}{12}+\dfrac{12}{12}=5+6+1=12$

38. 由期望值定義知：

所求 $E=p_1m_1+p_2m_2+p_3m_3$

$=0.2\times 2+0.3\times 4+0.5\times 6=0.4+1.2+3.0=4.6$

39. 已知箱中有 2 顆紅球、3 顆黑球

現一次取二球，則

$P(\text{恰有一紅球})=\dfrac{C_1^2\times C_1^3}{C_2^5}=\dfrac{6}{10}$，可得 10 元

$P(\text{恰有二紅球})=\dfrac{C_2^2}{C_2^5}=\dfrac{1}{10}$，可得 60 元

$P(\text{無紅球})=\dfrac{C_2^3}{C_2^5}=\dfrac{3}{10}$，可得 20 元

所以期望值

$E=10\times\dfrac{6}{10}+60\times\dfrac{1}{10}+20\times\dfrac{3}{10}=18$（元）

40. $E=500\times\dfrac{100}{125}+1000\times\dfrac{20}{125}+10000\times\dfrac{4}{125}$

$+20000\times\dfrac{1}{125}=1040$（元）

41. $30000\times\dfrac{2}{2000}+15000\times\dfrac{5}{2000}+1000\times\dfrac{30}{2000}$

$=82.5$（元）

42.

擲兩枚硬幣結果	p_i	m_i
2 正	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}$	2，4，6，8，10，12
1 正 1 反	$\frac{2}{4}\times\frac{1}{6}$	1，2，3，4，5，6
2 反	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}$	0

$\therefore E=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{6}\times(2+4+6+8+10+12)+\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{6}$

$\times(1+2+3+4+5+6)+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{6}\times 0$

$=\dfrac{7}{4}+\dfrac{7}{4}+0=\dfrac{7}{2}$

43. 1 ～ 34 號中
5 的倍數有 5、10、15、20、25、30
⇒共 6 種
7 的倍數有 7、14、21、28⇒共 4 種
不是 5 也不是 7 的倍數有 $34-6-4=24$（種）
期望值 $E=\frac{6}{34}\times 51+\frac{4}{34}\times 85+\frac{24}{34}\times 17=\frac{1054}{34}$
$=31$（元）

44.

X_i	$+1$	-4
P_i	0.994	0.006

$E=1\times 0.994+(-4)\times 0.006$
$=0.994-0.024$
$=0.97$（元）

45. ∵ $y+12=35$ ∴ $y=23$
又∵ $9+x=y=23$ ∴ $x=14$
且∵ $35+z=44$ ∴ $z=9$
得 $x+y+z=14+23+9=46$

46. 全班 40 人，故 100 分以下累積次數 $=40=d$
40 分以下人數
＝20 分以下人數＋(20 ～ 40) 分人數
$\Rightarrow 12=4+a\Rightarrow a=8$
60 分以下人數
＝40 分以下人數＋(40 ～ 60) 分人數
$\Rightarrow b=12+10\Rightarrow b=22$
100 分以下人數
＝80 分以下人數＋(80 ～ 100) 分人數
$\Rightarrow 40=34+c\Rightarrow c=6$
$a+b+c+d=8+22+6+40=76$

47. 由題意知：$\frac{x+y+z}{3}=4$，又
$\frac{(x+1)+(y+2)+(z+3)}{3}=\frac{x+y+z}{3}+\frac{1+2+3}{3}$
$=4+2=6$
∴ $x+1$、$y+2$ 與 $z+3$ 的算術平均數為 6

48. 將資料由小至大排列如下：
116，117，118，120，121，122，123，
124，126，132，138，145，151，157，
166，175，198，222，233，234
共 20 筆，$\frac{20}{2}=10$
∴中位數為第 10 筆與 11 筆資料的平均數，
即 $\frac{132+138}{2}=135$

49. ∵中位數為 60
則將資料由小至大排列應為：10，40，
40，50，x，65 $\boxed{，75，}$ 80，90，100
∴中位數為 $\frac{x+65}{2}=60\Rightarrow x=55$

50. ∵算術平均數 $\mu=\frac{73+75+76+77+79}{5}=76$
∴標準差＝
$\sqrt{\frac{(73-76)^2+(75-76)^2+(76-76)^2+(77-76)^2+(79-76)^2}{5}}$
$=\sqrt{\frac{9+1+0+1+9}{5}}=\sqrt{4}=2$

51. 一組資料中，當所有資料數據均相同時，表示所有資料與平均數相同（資料與平均數距離為 0），則此組資料的標準差為 0
故 (B) 的標準差最小

52. 將數字由小而大排列：
12，12，13，13，17，17，17，18
⑴眾數為 17
⑵中位數為 $\frac{13+17}{2}=15$
∴所求為 $17+15=32$

53. 加權平均數
$=\frac{81\times 4+72\times 3+68\times 3+84\times 1+78\times 1}{4+3+3+1+1}$
$=\frac{324+216+204+84+78}{12}$
$=\frac{906}{12}=75.5$（分）

54. ∵加權平均數為 80
$\Rightarrow 80=\frac{76\times 3+81\times 2+90\times x}{3+2+x}$
$\Rightarrow 400+80x=228+162+90x\Rightarrow 10x=10$
∴ $x=1$

55. 將數字由小到大排列：
52，55，58，60，63，67，74，76，88
∴全距為 $88-52=36$

56. 加權平均數
$=\frac{75\times 6+70\times 5+80\times 6+65\times 4+65\times 4}{6+5+6+4+4}$
$=\frac{1800}{25}=72$

對應課本各章頁碼

57. 將數值資料由小至大排列：

1，1，2，2，2，$\boxed{3，3}$，4，4，5，5，6

(1)中位數 $a=\dfrac{3+3}{2}=3$

(2)眾數 $b=2$

$\therefore$數對 $(a,b)=(3,2)$

58. $\because \begin{cases} a=2\times3=6 \\ b=2\times18-3=33 \end{cases}$

$\therefore\ b-a=33-6=27$

59. 算術平均數

$a=\dfrac{1}{10}(58+60+62+64+66+68+73+75+76+78)=\dfrac{680}{10}=68$

母體變異數

$b=\dfrac{1}{10}[(58-68)^2+(60-68)^2+(62-68)^2+(64-68)^2+(66-68)^2+(68-68)^2+(73-68)^2+(75-68)^2+(76-68)^2+(78-68)^2]$

$=\dfrac{1}{10}(100+64+36+16+4+0+25+49+64+100)$

$=\dfrac{458}{10}=45.8$

$\therefore$數對 $(a,b)=(68,45.8)$

60. 全距 $a=100-35=65$

將成績由小到大排列後得到：

35、42、50、65、73、75、80、85、90、100

$\Rightarrow$中位數 $b=\dfrac{73+75}{2}=74$

$\therefore\ a+b=65+74=139$

61. $\mu=\dfrac{75+60+85+100+80}{5}=80$

$\therefore$母體標準差＝

$\sqrt{\dfrac{(75-80)^2+(60-80)^2+(85-80)^2+(100-80)^2+(80-80)^2}{5}}$

$=\sqrt{170}$

62. 平均數 $\overline{X}=\dfrac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$

樣本標準差

$S=\sqrt{\dfrac{1}{6}[(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2]}=\dfrac{\sqrt{42}}{3}$

63. (1) 80 出現次數最多，故眾數為 80

(2)全距＝95－60＝35

(3)將資料由小到大排列：

60，75，78，80，80，95

中位數為$\dfrac{78+80}{2}=79$

(4) $\overline{x}=\dfrac{60+75+78+80+80+95}{6}=78$

64. 依題意知：$n=8$

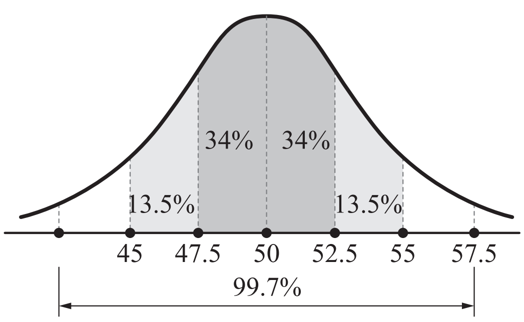
(A) 中位數為 $Me=\dfrac{55+60}{2}=\dfrac{115}{2}$

(B) 第一四分位數為 $Q_1=\dfrac{45+50}{2}=\dfrac{95}{2}$

(C) 第三四分位數為 $Q_3=\dfrac{65+70}{2}=\dfrac{135}{2}$

(D) $Q_3-Q_1=\dfrac{135}{2}-\dfrac{95}{2}=20$

65. 將題目的訊息，填入所給之常態分配曲線圖內，如圖：



① $P(x\le45)=50\%-(13.5\%+34\%)=2.5\%$

② $P(45\le x\le47.5)=13.5\%$

③ $P(52.5\le x\le55)=13.5\%$

④ $P(x\ge57.5)=(100\%-99.7\%)\times\dfrac{1}{2}=0.15\%$

66. 設第四次段考分數為 x 分，則

$60\times20\%+54\times20\%+51\times30\%+x\times30\%\ge60$

$\Rightarrow1200+1080+1530+30x\ge6000$

$\Rightarrow30x\ge2190$

$\Rightarrow x\ge73$

故小華至少需考 73 分以上

67. 將數值由小到大排成一列，得

$\begin{array}{ccccccc} 4、 & 7、 & 10、 & 12、 & 17、 & 24、 & 27 \\ \| & \| & \| & \| & \| & \| & \| \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array}$

共 7 筆資料，其中位數為 $x_{\frac{7+1}{2}}=x_4=12$

對應課本各章頁碼

68. 10 人平均 57000

$\Rightarrow$10 人月薪總和 $57000\times10=570000\cdots$①

7 人平均 27000

$\Rightarrow$7 人月薪總和 $27000\times7=189000\cdots$②

①－②得其餘 3 人月薪總和 381000

$\Rightarrow$3 人平均月薪$\dfrac{381000}{3}=127000$

故選 (D)

69. 每筆資料 x_i：$54,56,62,63,65\Rightarrow\mu=60$

$x_i-\mu$：$-6,-4,2,3,5$

$(x_i-\mu)^2$：$36,16,4,9,25\Rightarrow$和$=90$

所求母體變異數$=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu)^2}{2}=\dfrac{90}{5}=18$

故選 (A)

70. 將兩組數字由小到大排列

第一組：$58,64,73,85,91$

第二組：$63,69,78,90,96$

平移

觀察第二組數字皆比第一組數字多 5

根據標準差定義可得兩組標準差相同

$\therefore\ \sigma_1=\sigma_2\Rightarrow|\sigma_1-\sigma_2|=0$

故選 (A)

備註：資料的平移，標準差不變

71. $\underbrace{\text{最高價}-\text{最低價}}_{\text{全距}}\leq100$

選 (B)

72. $\mu+2\sigma=65+2\times10=85$

$\mu+2\sigma$以上佔$\dfrac{100-95}{2}\%=2.5\%$

$\Rightarrow3600\times\dfrac{2.5}{100}=90$ 人

73. 標準差看的是每一個數的離均差，每人多 20 分，平均也多 20 分，差距不變